

Courbes d'exposition : Approximation par les distributions MBBEFD et Pareto via maximum de vraisemblance et intervalles de confiance. Analyse en fonction du capital assuré.

Julien Saunier
Guy Carpenter
47/53 Rue Raspail
92594 Levallois-Perret Cedex
France
Telephone : 33(0) 1 56 76 48 09
Fax : 33 (0) 1 41 27 93 03
E-mail : julien.saunier@guycarp.com

- **Mots clés :** Courbes d'exposition, réassurance, capitaux assurés, MBBEFD, Pareto
- **Résumé :**

Cet article a pour objet l'étude des courbes d'exposition, courbes qui sont fondamentales dans la méthode de tarification par exposition en réassurance. Nous avons mené cette étude au travers de données sur le risque incendie en Pologne fournies par les deux principales compagnies d'assurance du marché.

Il existe peu de courbes d'exposition empiriques de marché. Pour les construire, il faut un nombre considérable de données, ce qui est notre cas pour cet article. Dans la pratique, on trouve différentes courbes pour différentes tranches de capitaux assurés. Le problème est que l'on a beaucoup de données sur les tranches basses avec donc des courbes fiables, mais peu sur les tranches hautes.

L'enjeu de cet article a donc été de construire un modèle qui permette de se baser sur une courbe correspondant à une tranche basse, donc fiable, pour construire des courbes d'exposition avec des capitaux assurés plus importants.

Pour cela, nous avons approximé les courbes d'exposition avec les distributions MBBEFD et Pareto par maximum de vraisemblance. Nous avons pu ainsi obtenir des intervalles de confiance sur ces courbes par la méthode Delta.

Toutes ces études nous ont permis de pouvoir mettre en place et calibrer le modèle, s'appuyant sur le constat d'un lien fort entre courbe d'exposition et capital assuré. Le fait qu'il y ait peu de données sur les tranches hautes de capital assuré nous a conduit à construire un modèle à partir duquel on puisse déduire des courbes d'exposition, pour n'importe quel capital assuré, d'une courbe de référence ajustée au préalable.

INTRODUCTION	3
PARTIE I : APPROXIMATION DES COURBES D'EXPOSITION PAR LES DISTRIBUTIONS MBBEFD ET PARETO VIA MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE	3
Chapitre 2 : Mise en application	5
Chapitre 3 : Courbe empirique au delà de 3%	7
Chapitre 3 : Méthode delta	11
Chapitre 4 : EMV à 1 paramètre pour une MBBEFD	13
Chapitre 5 : EMV Pareto	16
PARTIE II : ETUDE DES COURBES D'EXPOSITION EN FONCTION DU CAPITAL ASSURE	19
Chapitre 1 : Présentation de la problématique	19
Chapitre 2 : Modèle de régression linéaire	20
Chapitre 3 : Modèle non linéaire	22
Section 1.1 : Description et analyse	22
Section 1.2 : Construction	25
1.2.1 Référence MBBEFD	26
1.2.2 Référence Pareto	27
Section 1.3 : Analyse de la transformée d'une MBBEFD ou d'une Pareto par le modèle	28
1.3.1 Transformée d'une MBBEFD	28
1.3.2 Transformée d'une Pareto	30
CONCLUSION	31
RÉFÉRENCES :	31

Introduction

Dans la pratique de la réassurance en risque incendie, on trouve une méthode nommée 'exposure rating' ou cotation par exposition. Cette méthode s'appuie sur des courbes appelées courbes d'exposition. Elle permet de répartir les primes entre l'assureur et le réassureur, sans dépendre des fluctuations statistiques de la sinistralité. Malheureusement, les seules courbes disponibles sont peu nombreuses et peu récentes.

Ainsi il paraissait intéressant de pouvoir modéliser de telles courbes à partir d'un portefeuille quelconque, et d'en étudier les propriétés.

Dans cette étude, nous nous sommes consacrés à un portefeuille polonais, avec des données recueillies auprès des deux plus importantes sociétés d'assurance polonaises, représentant à elles deux une part très significative de ce marché, environ 70%. Nous nous sommes focalisés sur les risques 'artisans-commerçants-entreprises' ('ace') et 'particuliers'.

Après avoir construit un fichier de données homogène et recensé les différentes méthodes existantes pour modéliser des courbes d'exposition de façon analytique (cf. travaux de S.Bernegger et T.Mack), nous avons articulé la première partie autour de la notion d'ajustement des courbes analytiques et empiriques, notamment avec la méthode du maximum de vraisemblance, qui nous a permis par la suite de trouver des intervalles de confiance, en connexion avec la méthode Delta, sur ces courbes d'exposition analytiques.

Par étude approfondie de ces courbes d'exposition, nous avons décelé un lien entre ces dernières et la notion de capital assuré. Ainsi, à partir de cette constatation, nous avons bâti dans une deuxième partie un modèle qui fournit des courbes d'exposition pour n'importe quel capital assuré.

Partie I : Approximation des courbes d'exposition par les distributions MBBEFD et Pareto via maximum de vraisemblance

Chapitre 1 : Théorie

Suite à l'article de S.Bernegger [1] sur les courbes MBBEFD, on possède une expression analytique de ce type de courbes afin de modéliser des courbes d'exposition.

En considérant un taux de dommage $x = \frac{\text{montant de sinistre}}{\text{somme assuré}}$, on a :

$$G_{b,g}(x) = \frac{\ln\left(\frac{(g-1)b + (1-gb)b^x}{1-b}\right)}{\ln(gb)} \quad \text{pour } b > 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } bg \neq 1 \text{ et } g > 1 \text{ où } b \text{ et } g \text{ sont des}$$

paramètres.

Compte tenu du lien
$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$
 où F est la fonction de répartition

associée, on trouve la densité suivante :

$$f(x) = \frac{(b-1)(g-1) \ln(b) b^{1-x}}{\left((g-1)b^{1-x} + (1-gb)\right)^2}$$

On considère un échantillon de taux de dommage de dimension n (x_1, x_2, \dots, x_n) . On veut ajuster une courbe MBBEFD sur une courbe empirique, c'est-à-dire qu'il nous faut trouver les coefficients b et g d'une courbe MBBEFD qui reflète au mieux nos données empiriques.

Pour ce faire, on va utiliser la méthode classique de maximisation de la log-vraisemblance.

Dans un but de simplification et de clarté des calculs, on pose : $D = (g-1)b^{1-x_i} + 1 - gb$

La vraisemblance est ainsi :

$$\prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{(b-1)(g-1) \ln(b) b^{1-x_i}}{\left[(g-1)b^{1-x_i} + (1-gb)\right]^2} = \left((b-1)(g-1) \ln(b)\right)^n \prod_{i=1}^n \frac{b^{1-x_i}}{D^2}$$

La log-vraisemblance donne donc :

$$\ln\left(\prod_{i=1}^n f(x_i)\right) = B = n \cdot \ln[(b-1)(g-1) \ln(b)] + \sum_{i=1}^n \ln\left[\frac{b^{1-x_i}}{D^2}\right]$$

On doit donc résoudre le système (1) suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial g} = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

équivalent à

$$\begin{cases} \frac{n}{(g-1)} - 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{b^{1-x_i} - b}{D} = 0 \Leftrightarrow h_1 = 0 \\ \frac{n \left[\ln(b) + 1 - \frac{1}{b} \right]}{(b-1) \ln(b)} + \sum_{i=1}^n \frac{\left[D \cdot b^{-x_i} (1-x_i) - 2 \cdot b^{1-x_i} \left[(g-1)(1-x_i) b^{-x_i} - g \right] \right]}{D \cdot b^{-x_i}} = 0 \Leftrightarrow h_2 = 0 \end{cases}$$

A ce stade nous faisons face à deux équations non linéaires à deux inconnues, que l'on ne sait résoudre formellement.

Nous décidons donc de mettre en œuvre une méthode de résolution numérique : la méthode de *Newton-Raphson*.

L'algorithme se transpose donc de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{k+1} = b_k - \left(\frac{h_1(b_k, g_k) * \frac{\partial h_2(b_k, g_k)}{\partial g} - h_2(b_k, g_k) * \frac{\partial h_1(b_k, g_k)}{\partial g}}{\frac{\partial h_1(b_k, g_k)}{\partial b} * \frac{\partial h_2(b_k, g_k)}{\partial g} - \frac{\partial h_1(b_k, g_k)}{\partial g} * \frac{\partial h_2(b_k, g_k)}{\partial b}} \right) \\ g_{k+1} = g_k - \left(\frac{h_2(b_k, g_k) * \frac{\partial h_1(b_k, g_k)}{\partial b} - h_1(b_k, g_k) * \frac{\partial h_2(b_k, g_k)}{\partial b}}{\frac{\partial h_1(b_k, g_k)}{\partial b} * \frac{\partial h_2(b_k, g_k)}{\partial g} - \frac{\partial h_1(b_k, g_k)}{\partial g} * \frac{\partial h_2(b_k, g_k)}{\partial b}} \right) \end{array} \right.$$

Les détails des calculs ainsi que les résultats formels se trouvent dans le mémoire de J.Saunier [3].

Chapitre 2 : Mise en application

On dispose ainsi de tous les éléments nécessaires pour mettre en place l'algorithme de Newton-Raphson. On choisit deux valeurs initiales pour b et g. La théorie stipule que l'on doit choisir des solutions approchées du système d'équations rencontrées. Ici, nous prendrons les paramètres trouvés par ajustement à l'aide des moindres carrés.

En ce qui concerne le critère d'arrêt (CA), notre choix s'est porté sur :

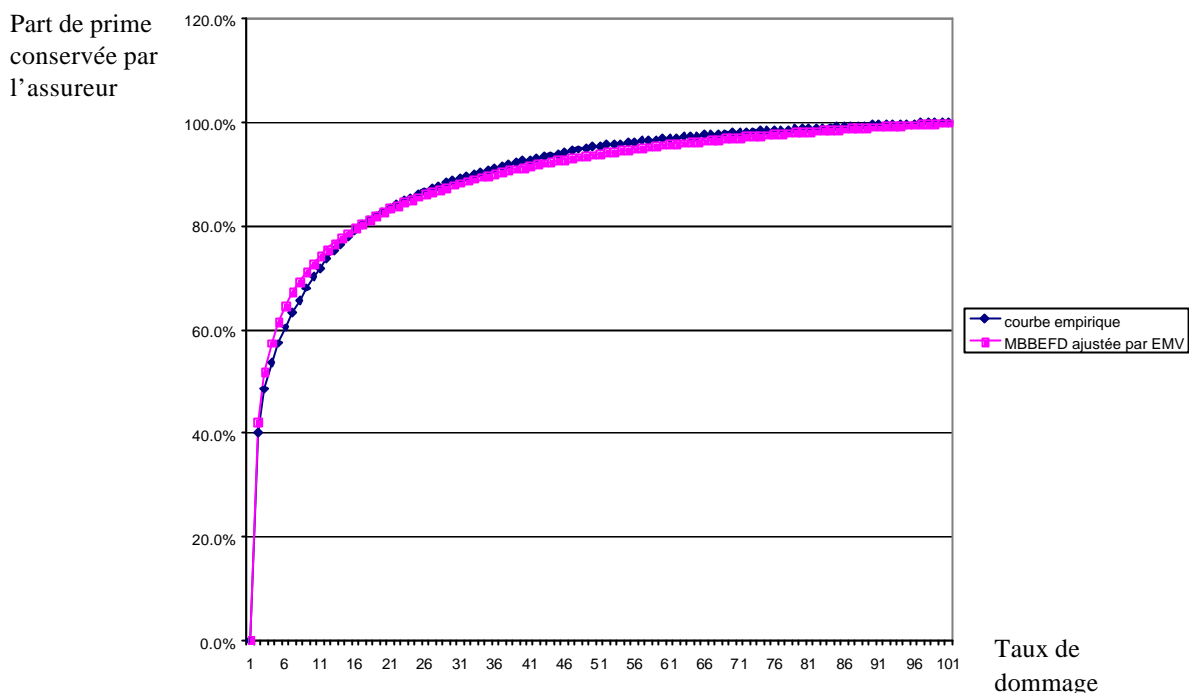
$$CA = \sqrt{\left(\frac{b_{k+1} - b_k}{b_k}\right)^2 + \left(\frac{g_{k+1} - g_k}{g_k}\right)^2}$$

Nous avons décidé de considérer des quantités normalisées plutôt que les simples différences élevées au carré car nous avons constaté que les paramètres b et g prenaient des valeurs sensiblement différentes, à savoir b compris entre 0 et 1, et g de l'ordre de la centaine ou du millier.

On considère que l'algorithme a convergé dès lors que le critère d'arrêt est inférieur à 0.01 ou 0.001.

On obtient par exemple des résultats du type (graph 1) :

Ajustement EMV d'une MBBEFD à 2 paramètres



qui sont dans ce cas très satisfaisants. On trouve ici une courbe de la classe MBBEFD qui approche particulièrement bien la courbe d'exposition empirique.

Néanmoins, nous avons constaté par expérience, que l'on peut se trouver face aux problèmes suivants : lorsque l'on initialise l'algorithme de Newton-Raphson par les valeurs des paramètres trouvés par les moindres carrés, il peut arriver que l'algorithme débouche sur des valeurs de paramètres négatifs, ce qui pose un réel problème à cause de la présence de la fonction log prise en ces valeurs. On est alors obligé d'initialiser l'algorithme avec des valeurs différentes.

Un autre problème rencontré est de constater la convergence de l'algorithme, en observant toutefois une différence sensible au niveau de l'adéquation graphique. On peut alors penser que l'on se trouve dans le cas d'un minimum local. Ainsi pour ce cas précis nous allons considérer l'ajustement par moindres carrés qui s'avère beaucoup plus pertinent, compte tenu du problème rencontré. Lorsque l'on rencontre l'un ou l'autre de ces cas de figure, il reste quand même à notre disposition la méthode des moindres carrés, qui fournit des résultats très robustes.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, il nous est apparu plus utile, dans une optique d'étude en réassurance, d'étudier les sinistres pour des taux de dommage supérieurs à 3%, seuil que nous avons fixé au début de l'étude, et qui nous semblait le plus pertinent.

Nous allons détailler comment construire une courbe empirique pour des données où l'on observe uniquement des taux de dommage supérieurs à 3%, puis l'ajustement des courbes MBBEFD à de telles courbes empiriques.

On cherche à travailler sur des courbes théoriques plutôt qu'empiriques car en ayant une expression analytique, on possède ainsi une courbe continue ce qui nous permet de coter n'importe quel programme, évitant ainsi toute interpolation.

Chapitre 3 : Courbe empirique au delà de 3%

Pour construire de telles courbes, on se base sur les fichiers initiaux où l'on trouve le montant de sinistre, la somme assurée correspondante ainsi que le taux de dommage.

Ensuite on ne sélectionne que les sinistres qui ont un taux de dommage excédent 3%.

On a donc un échantillon de taux de dommage compris dans [3%, 100%].

L'étude des courbes d'exposition se fait habituellement dans l'intervalle [0%, 100%] donc nous allons procéder à un changement de variable pour se ramener à un tel échantillon.

On pose :

$$\begin{cases} S' = S - 3\% \cdot K \\ K' = 0.97 \cdot K \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \text{taux de dommage} = \frac{S'}{K'}$$

On se trouve alors dans le cas 'standard', donc on peut trouver la courbe d'exposition correspondante comme suit :

$$x = \frac{\sum_i \max(t_i \cdot K_i - t \cdot K_i, 0)}{\sum_i S_i} \quad \text{où } S_i \text{ représente le montant du sinistre } i$$

K_i représente le capital assuré correspondant

t_i représente le taux de dommage correspondant

x représente la part de la prime de risque conservée par l'assureur, en fonction du taux de dommage t .

On applique cette formule pour l'ensemble du portefeuille et pour t variant de 0% à 100% : on obtient la courbe d'exposition empirique souhaitée.

On obtient alors une courbe d'exposition classique, qu'il nous faut retransformer pour faire ressortir le choix d'étudier ces sinistres après 3%.

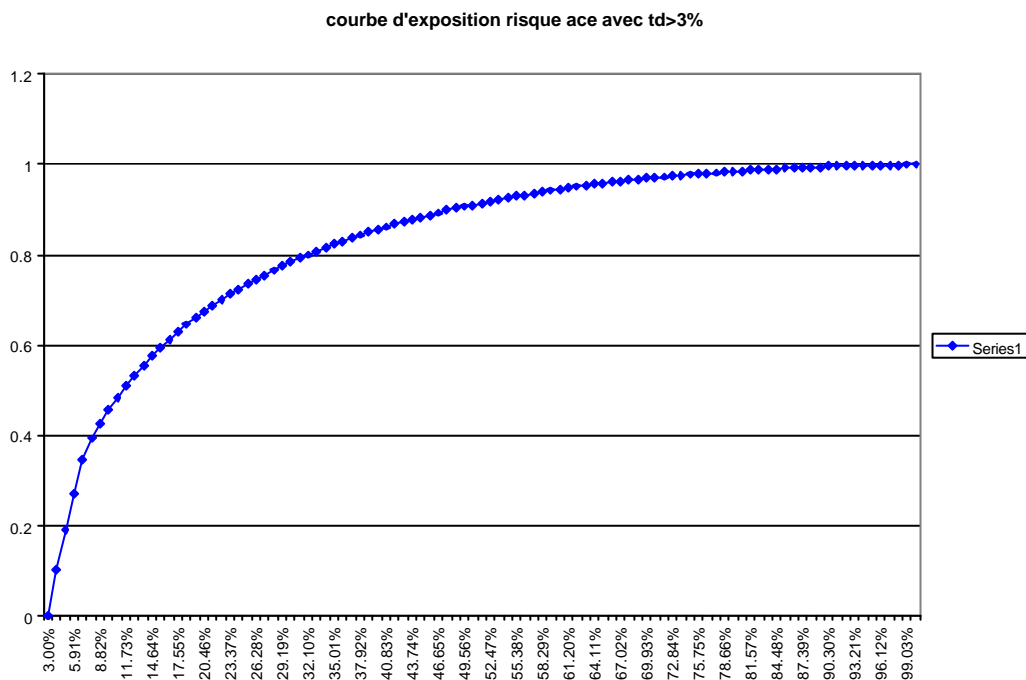
Pour ce faire, on opère un nouveau changement de variable qui se résume à :

Taux de dommage (x)	Part conservée par l'assureur
0%	0%
1%	...
2%	...
...	...
...	...
100%	100%

⇒

Taux de dommage	Soit	Part conservée par l'assureur
$0.97 \cdot 0 + 0.03$	3%	0%
"		
"		
$0.97 \cdot x + 0.03$		
"		
"	100%	100%

On obtient donc une courbe empirique, pour le risque 'ace' par exemple de la forme (graph2):



L'enjeu est ensuite d'ajuster une courbe MBBEFD sur cette courbe empirique, puis de reconstituer la courbe d'exposition théorique complète sur $[0,1]$ en intégrant la partie manquante sur $[0\%, 3\%]$. Pour cela nous utiliserons les courbes d'exposition empiriques construites au préalable.

En effet, pour passer de la courbe théorique sur $[3\%, 100\%]$ à $[0\%, 100\%]$, il nous faut appliquer un changement de variable qui permette d'obtenir une courbe pour laquelle au point d'abscisse 3% (auquel correspondait 0% en ordonnée) on fait correspondre la valeur lue sur la courbe empirique, pour assurer la continuité entre les deux.

Ainsi de la courbe théorique (MBBEFD) sur [3%,100%] et de la courbe empirique sur [0%, 100%], on déduit une courbe théorique sur [0%, 100%].

Formellement, ce travail sur les taux de dommage à partir de 3% s'écrit de la manière suivante :

Après notre premier changement de variable sur les données initiales, on a une courbe d'exposition sur [0,1] $G(x)$ pour x allant de 0% à 100%.

Ensuite on réalise un ajustement MBBEFD à l'aide du maximum de vraisemblance et on obtient une courbe théorique que l'on note $G_{b,g}(x)$, toujours pour x dans [0%, 100%].

Puis on remplace $x \in [0,1]$ par $0.97.x+0.03$ pour obtenir notre courbe théorique définie de la sorte :

Taux de dommage	Part à charge de l'assureur
3%	$G_{b,g}(0\%)$
3.97%	$G_{b,g}(1\%)$
...	...
...	...
...	...
100%	$G_{b,g}(100\%) = 1$

A ce stade, il nous faut intégrer la partie concernant [0%,3%].

Sur la courbe empirique on lit pour le point d'abscisse 3% : $G(3\%)$.

On effectue alors le dernier changement de variable :

Taux de dommage	Part conservée par l'assureur
3%	$G_{b,g}(0\%).[1 - G(3\%)] + G(3\%)$
3.97%	$G_{b,g}(1\%).[1 - G(3\%)] + G(3\%)$
...	...
x	$G_{b,g}(x\%).[1 - G(3\%)] + G(3\%)$
...	
100%	1

Pour les valeurs initiales à savoir 1% et 2% on prend les valeurs lues sur la courbe empirique.

Au final, on a la courbe :

Taux de dommage	Part conservée par l'assureur
0%	G (0%)
1%	G (1%)
2%	G (2%)
3%	$G_{b,g} (0\%).[1 - G(3\%)] + G(3\%)$
3.97%	$G_{b,g} (1\%).[1 - G(3\%)] + G(3\%)$
...	...
$0.97 * x + 0.03$	$G_{b,g} (x\%).[1 - G(3\%)] + G(3\%)$
...	...
100%	$G_{b,g} (100\%).[1 - G(3\%)] + G(3\%) = 100\%$

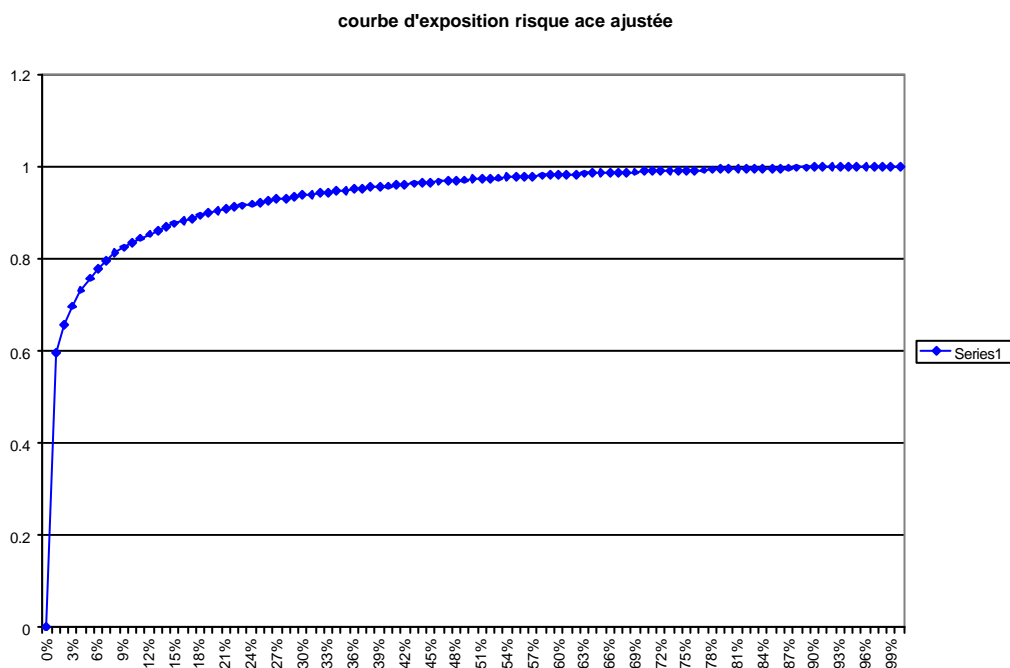
Par souci de clarté et de simplification, nous décidons de présenter les données sur des taux de dommage entiers.

Pour 4% par exemple, on veut donc $0.97 * x + 0.03 = 4\%$ soit $x = \frac{4\% - 3\%}{0.97}$ donc au taux de

dommage 4% on associe $G_{b,g} \left(\frac{4\% - 3\%}{0.97} \right) [1 - G(3\%)] + G(3\%)$. On fait de même pour tous les taux dont nous avons besoins, par exemple tous les entiers sur 0-100%.

On a ainsi reconstitué une courbe théorique sur [0%, 100%].

Par exemple, si on prend la courbe qui a été présentée ci-dessus, on obtient une courbe du type (graph3):



Il faut comparer cette courbe à la courbe d'exposition empirique du risque 'ace' qui a été présentée auparavant.

Chapitre 3 : Méthode delta

L'avantage indéniable de la méthode du maximum de vraisemblance est qu'elle nous permet de transférer l'incertitude sur les paramètres, due à l'ajustement, aux courbes MBBEFD : il s'agit de la méthode Delta qui fournit ainsi des intervalles de confiance sur ces courbes.

L'utilisation du maximum de vraisemblance dans le cas des fonctions du type MBBEFD conduit à :

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{b}_n \\ \hat{g}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ g \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N \left(0; I_0^{-1} \begin{pmatrix} b \\ g \end{pmatrix} \right)$$

Dans notre étude on pose :

$$I = \begin{pmatrix} -E \left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b \partial g} \right] \\ -E \left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial g \partial b} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial g^2} \right] \end{pmatrix} \quad \text{la matrice d'information de Fisher.}$$

$$\text{d'où } I_0^{-1} = \frac{n}{\frac{\partial h_2}{\partial b} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial g} - \frac{\partial h_2}{\partial g} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial b}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h_1}{\partial g} & \frac{\partial h_2}{\partial g} \\ \frac{\partial h_1}{\partial b} & -\frac{\partial h_2}{\partial b} \end{pmatrix} \quad \text{en reprenant les notations utilisées}$$

précédemment pour la méthode du maximum de vraisemblance.

Ici, l'étude des courbes de la classe MBBEFD nous amène à poser pour fonction h :

$$h((b, g)) = G_x((b, g)) = \frac{\ln \left(\frac{(g-1)b + (1-g)b^x}{1-b} \right)}{\ln(g.b)}$$

On a donc :

$$\sqrt{n}(G_{\hat{b},\hat{g}}(x) - G_{b,g}(x)) \rightarrow N(0, \Delta_q \cdot I_0^{-1} \cdot {}^t \Delta_q) \text{ pour tout } x \in [0;1]$$

avec $\Delta_q = \left(\frac{\partial G_{b,g}}{\partial b}, \frac{\partial G_{b,g}}{\partial g} \right)$. Dans ce cas précis, $\Delta_q \cdot I_0^{-1} \cdot {}^t \Delta_q$ est donc une matrice (1,1), c'est-à-dire un nombre réel, que nous nommerons à présent a^2 .

De $\sqrt{n}(G_{\hat{b},\hat{g}}(x) - G_{b,g}(x)) \rightarrow N(0, a^2)$, on peut écrire :

$$\sqrt{n} \left(\frac{G_{\hat{b},\hat{g}}(x) - G_{b,g}(x)}{a} \right) \rightarrow N(0, 1)$$

Posons $X = \sqrt{n} \left(\frac{G_{\hat{b},\hat{g}}(x) - G_{b,g}(x)}{a} \right)$.

$$\text{On a alors } P[-d \leq X \leq d] = \Phi(d) - \Phi(-d) = 2\Phi(d) - 1$$

Si on veut un intervalle à 95%, on prend d tel que :

$$2\Phi(d) - 1 = 95\% \text{ soit } d = \Phi^{-1}\left(\frac{1,95}{2}\right) = 1,96$$

On détermine ainsi un intervalle de confiance à 95% sur X, pour tout x :

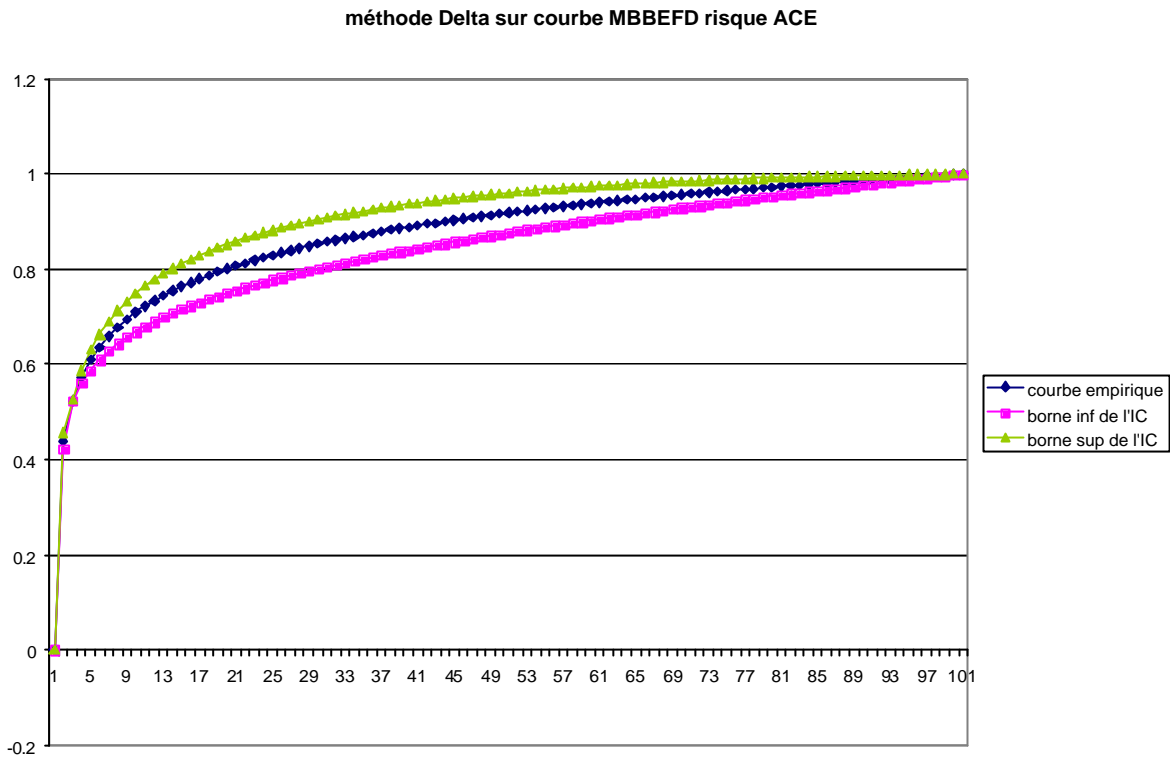
$$-d \leq \sqrt{n} \left(\frac{G_{\hat{b},\hat{g}}(x) - G_{b,g}(x)}{a} \right) \leq d$$

Au final, l'intervalle de confiance à 95% sur une courbe MBBEFD s'écrit donc :

$$-\frac{a \cdot d}{\sqrt{n}} + G_{\hat{b},\hat{g}}(x) \leq G_{b,g}(x) \leq \frac{a \cdot d}{\sqrt{n}} + G_{\hat{b},\hat{g}}(x) \text{ pour tout } x$$

Dans la suite de l'article, tous les intervalles de confiance seront calculés au seuil de 95%.

Sur le risque ACE, on obtient par exemple (graph 4):



Chapitre 4 : EMV à 1 paramètre pour une MBBEFD

Lors de l'étude du maximum de vraisemblance à deux paramètres, nous avons à notre disposition l'inverse de la matrice d'information de Fisher, et par là même, la covariance entre les deux paramètres ainsi que la variance de chacun de ces derniers. Nous sommes donc en mesure de déterminer le coefficient de corrélation entre b et g .

Après calculs sur un certain nombre de courbes différentes, nous avons observé des coefficients de corrélation proches de 1, c'est pourquoi nous avons décidé d'étudier les courbes MBBEFD à 1 paramètre, et de ré appliquer la méthode du maximum de vraisemblance pour trouver ce paramètre et la méthode Delta.

Comme précisé dans l'article de S.Bernegger [1], les deux paramètres b et g peuvent tous les deux s'exprimer en fonction d'un même troisième c :

$$\begin{cases} b_c = b(c) = \exp(3.1 - 0.15 * (1 + c)c) \\ g_c = g(c) = \exp((0.78 + 0.12c)c) \end{cases}$$

La courbe d'exposition s'écrit alors :

$$G_c(x) = G_{b_c, g_c}(x)$$

La log-vraisemblance s'écrit alors, si l'on considère un échantillon (x_1, \dots, x_n) de taux de dommage:

$$\ln L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = n \cdot \ln \left[\left(e^{(0.78+0.12c)c} - 1 \right) \left(e^{3.1-0.15(1+c)c} - 1 \right) (3.1 - 0.15(1+c)c) \right] + \sum_{i=1}^n \left[\ln \left(e^{[3.1-0.15(1+c)c](1-x_i)} \right) - \ln(D_i^2) \right]$$

Ainsi on peut écrire :

$$\ln L = n[A + B + G] + F + E$$

avec

$$\begin{cases} A = \ln \left(e^{(0.78+0.12c)c} - 1 \right) \\ B = \ln \left(e^{3.1-0.15(1+c)c} - 1 \right) \\ G = \ln \left(3.1 - 0.15(1+c)c \right) \\ F = [3.1 - 0.15(1+c)c] \cdot \sum_i (1 - x_i) \\ E = -2 \cdot \sum_i \ln \left[\left(e^{(0.78+0.12c)c} - 1 \right) e^{[3.1-0.15(1+c)c](1-x_i)} + 1 - e^{3.1+0.63c-0.03c^2} \right] \end{cases}$$

Il faut à présent calculer $\frac{\partial \ln L}{\partial c}$. Pour cela, nous effectuerons des calculs intermédiaires, permettant de trouver les dérivées de A, B, G et E.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial c} = n \cdot [A' + B' + G'] + F' + E'$$

quantité que l'on doit annuler pour trouver le paramètre c qui maximise la log-vraisemblance. On se retrouve à nouveau dans le cas d'une équation que l'on ne peut résoudre analytiquement (comme dans le cas à deux paramètres).

On va donc remettre en place l'algorithme de Newton-Raphson afin de trouver une solution numérique à ce problème.

On a donc :

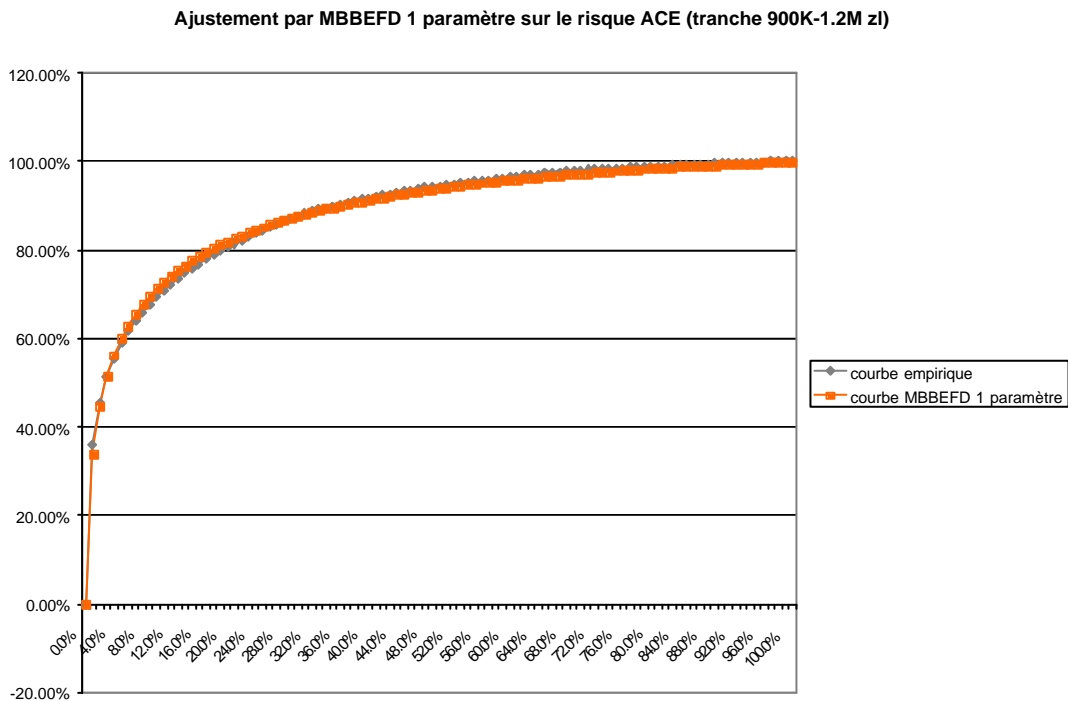
$$c_{n+1} = c_n - \frac{\left(\frac{\partial \ln L}{\partial c}\right)(c_n)}{\left(\frac{\partial \ln L}{\partial c}\right)(c_n)}$$

soit

$$c_{n+1} = c_n - \frac{(n.A'+n.B'+n.G'+F'+E')(c_n)}{(n.A''+n.B''+n.G''+F''+E'')(c_n)}$$

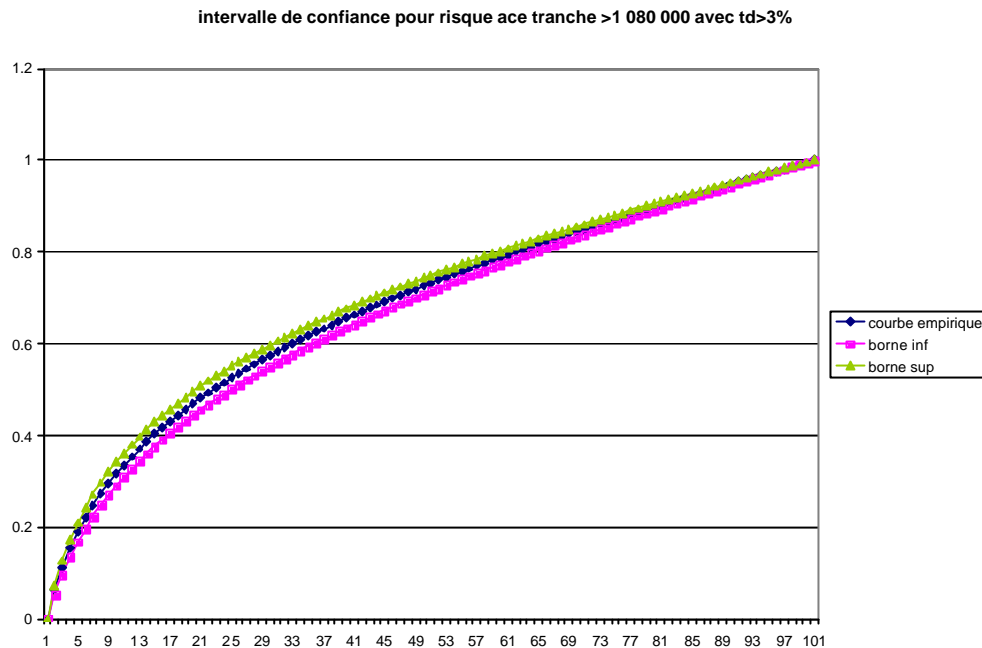
Les détails des calculs ainsi que les résultats formels se trouvent dans le mémoire de J.Saunier [3].

Par exemple, si on représente l'ajustement obtenu pour une tranche de capital assuré compris entre 900 000 et 1 200 000 zlotys pour le risque 'ace', on obtient le graphique suivant (graph5):



De façon analogue aux courbes MBBEFD à 2 paramètres, on peut trouver des intervalles de confiance pour l'ajustement avec les courbes MBBEFD à 1 paramètre, et ce toujours grâce à la méthode Delta via l'estimation par maximum de vraisemblance.

Si on considère les données pour lesquelles le taux de dommage est supérieur à 3% pour des sommes assurées supérieures à 1 080 000 zlotys, on obtient le graphique suivant (graph 6):



En appliquant la méthode Delta avec des courbes MBBEFD à 1 paramètre, on trouve empiriquement des intervalles de confiance beaucoup plus resserrés qu'avec les courbes MBBEFD à 2 paramètres, ce qui semble logique car avec un paramètre en moins, on a moins d'incertitude, donc un intervalle de confiance plus étroit.

Chapitre 5 : EMV Pareto

Comme on l'a écrit antérieurement, la distribution de Pareto est également utilisée pour modéliser les courbes d'exposition (T.Mack [2]). En plus de la méthode des moindres carrés, on peut aussi envisager de trouver le paramètre adéquat pour une courbe donnée par la méthode du maximum de vraisemblance, pour ensuite trouver des intervalles de confiance, exactement comme nous l'avons déjà fait pour les courbes MBBEFD à 1 et 2 paramètres.

On considère toujours un seuil de 3%.
La densité pour une loi de Pareto est donnée par :

$$f(x) = \frac{a \cdot x^{-a-1}}{a^{-a} - 1} \text{ où } a \text{ représente le seuil (ici 3\%) et } a \text{ le paramètre.}$$

On considère un échantillon (x_1, \dots, x_n) .

La méthode est donc identique, on commence par calculer la vraisemblance :

$$L(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{a} \cdot \frac{x_i^{-a-1}}{a^{-a} - 1} = \left(\frac{\mathbf{a}}{a^{-a} - 1} \right)^n \cdot \prod_i x_i^{-a-1}$$

puis la log-vraisemblance :

$$\ln L = n \cdot \ln \left(\frac{\mathbf{a}}{a^{-a} - 1} \right) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i^{-a-1}) = n \cdot \ln \left(\frac{\mathbf{a}}{a^{-a} - 1} \right) - (\mathbf{a} + 1) \cdot \sum_i \ln(x_i)$$

Calculons à présent la dérivée de lnL par rapport à a :

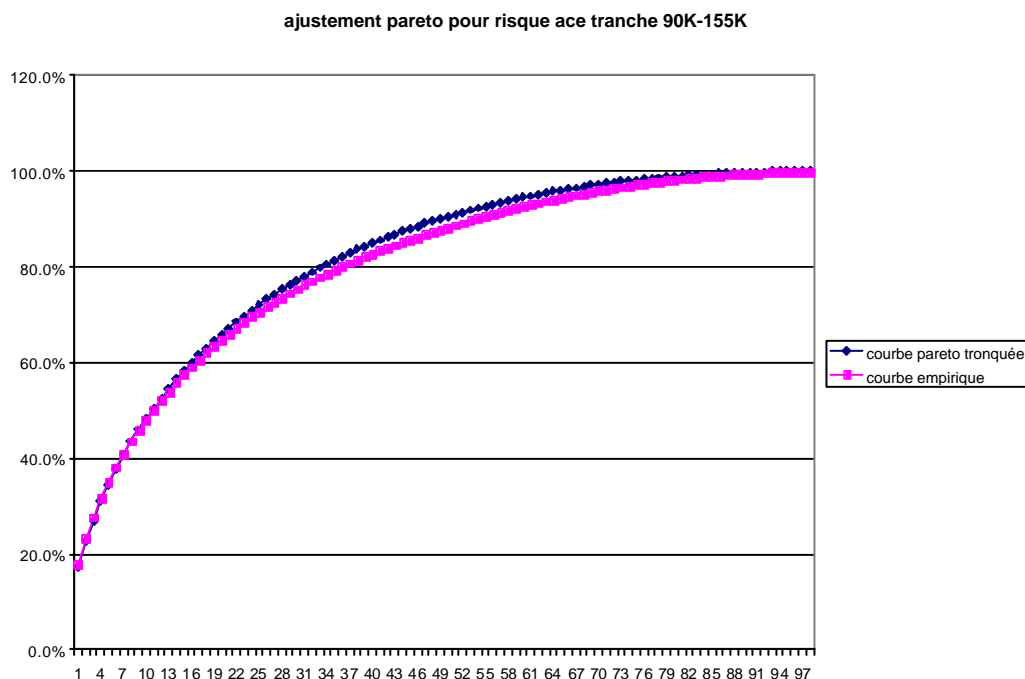
soit :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathbf{a}} = n \cdot \frac{a^{-a} - 1 + \mathbf{a} \cdot (\ln a) \cdot a^{-a}}{(a^{-a} - 1) \mathbf{a}} - \sum_i \ln(x_i) = 0 \Leftrightarrow g(\mathbf{a}) = 0$$

Ici encore, on ne peut résoudre cette équation directement afin d'en tirer une valeur de a. On doit ainsi encore faire appel à la méthode de résolution numérique de Newton-Raphson. Celle-ci nous indique que l'on doit procéder selon l'algorithme suivant :

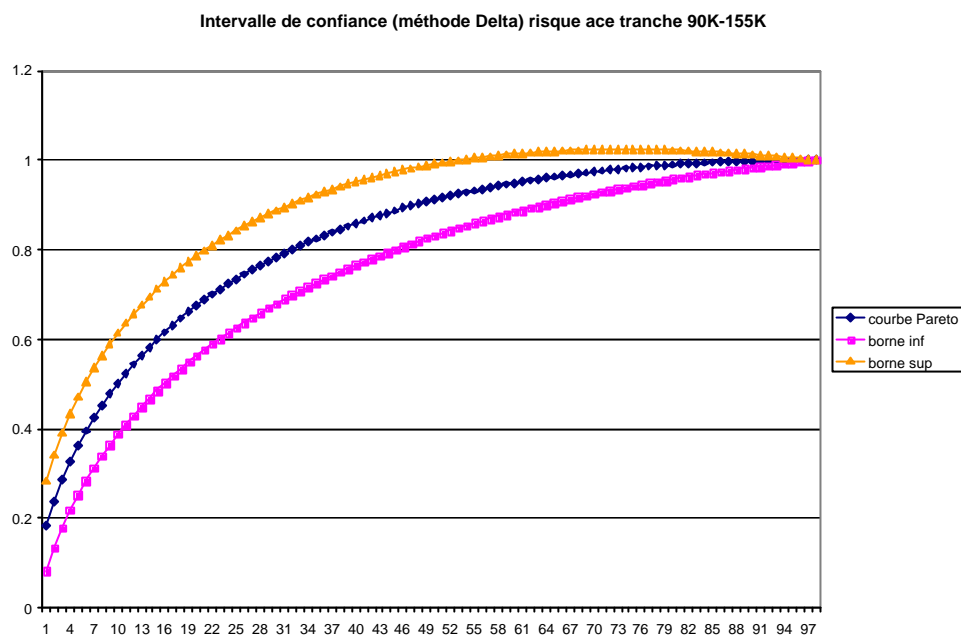
$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n - \frac{g(\mathbf{a}_n)}{g'(\mathbf{a}_n)}$$

On obtient par exemple des ajustements du type (graph 7):



La encore nous avons pu, grâce à l'emv, mettre en place la méthode Delta pour obtenir des intervalles de confiance.

Pour la courbe présentée au-dessus, l'intervalle de confiance donné par la méthode Delta est le suivant (graph 8):



Partie II : Etude des courbes d'exposition en fonction du capital assuré

Chapitre 1 : Présentation de la problématique

Comme on peut le constater sur les courbes de la Swiss Re, les courbes d'exposition ont une forme différente suivant la tranche de capital assuré qu'elle représentent. Ainsi cette partie est consacrée à l'étude de la relation entre courbes d'exposition et capital assuré.

Dans cette partie, nous avons décidé de nous intéresser uniquement aux taux de dommage supérieurs à 3%, pour la raison évoquée précédemment.

Les résultats présentés ici ne concerneront que le risque 'ace'.

L'idée première est de créer des classes de capitaux assurés sur le risque 'ace' et de représenter les courbes d'exposition. Ce travail est opéré à partir d'un fichier où l'on a retenu que les sinistres avec un taux de dommage supérieur à 3%. Ainsi, on applique le changement de variable évoqué dans une partie antérieure, afin de se ramener sur [0, 100%].

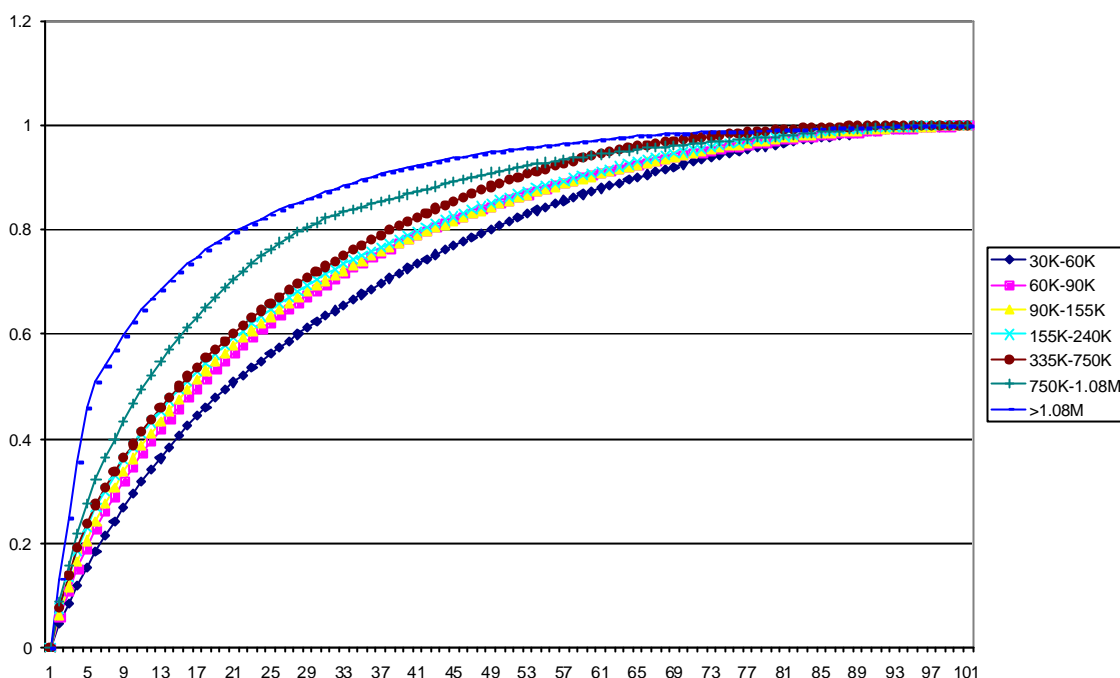
Le programme développé à cet effet sous SAS admet le nombre de classes comme paramètre, c'est-à-dire que l'on rentre le nombre de classes souhaitées, et le programme traite le fichier initial de façon à engendrer le nombre de classes souhaitées, avec des tranches de capital qui évoluent de façon linéaire sur les tranches basses et selon des fonctions puissance sur les tranches plus hautes.

Pour illustrer ceci, nous choisissons arbitrairement d'étudier 8 tranches de capitaux différentes, réparties comme suit :

<i>Numéro de courbe</i>	<i>Tranche de capital assuré (en zlotys)</i>
<i>1</i>	30K – 60K
<i>2</i>	60K – 90K
<i>3</i>	90K – 155 K
<i>4</i>	155K – 240K
<i>5</i>	240K – 335K
<i>6</i>	335K – 750K
<i>7</i>	750K – 1.08 M
<i>8</i>	> 1.08M

Les courbes d'exposition empiriques associées sont présentées ci-après (graph 9):

courbes d'expo empiriques par classes de capitaux pour $td \geq 3\%$



Toutes les courbes sont bien superposées, les plus éloignées de la diagonale représentant les plus grands capitaux assurés, excepté la courbe 5, que nous décidons donc de supprimer de l'étude.

Le but premier de cette partie est de pouvoir trouver une courbe d'exposition correspondant à n'importe quel capital assuré, différent de ceux présentés ci-dessus. Pour cela, nous allons utiliser des régressions sur les courbes précédentes.

Chapitre 2 : Modèle de régression linéaire

A ce niveau, l'idée la plus naturelle est d'essayer de faire une régression linéaire simple, afin de déterminer la part de la prime conservée par l'assureur en fonction du capital assuré, pour un taux de dommage donné, avec un modèle du type :

$$h(K, t) = \text{fonction}(K) \quad \text{pour tout taux de dommage } t.$$

Etant donné l'allure générale des courbes présentées ci-dessus, on peut conjecturer la présence de la fonction logarithme dans la régression. On peut donc au final retenir et comparer les trois modèles suivants, pour différentes valeurs de t :

$$(1) : h(K, t) = u * K + t$$

$$(2) : h(K, t) = u * \ln(K) + t$$

$$(3) : \ln(h(K, t)) = u * K + t$$

où u et t sont des constantes et K représente le capital assuré moyen par tranche.

Rq : Si on pondère ce capital assuré moyen par les sinistres, afin de tenir compte de la sinistralité observée, on trouve des capitaux assurés moyens identiques.

Nous avons testé ces trois modèles pour deux taux de dommage différents que sont 10% et 30%.

Toutes les sorties SAS correspondantes se trouvent dans le mémoire de J.Saunier [3].

Pour le taux de dommage 10% par exemple, les résultats sont les suivants :

<i>Modèle</i>	<i>Mesure de l'ajustement (R²)</i>
1	0.8341
2	0.9476
3	0.7480

Ainsi sur ce taux de dommage on va retenir le modèle (2) qui présente le R^2 le plus élevé. On retiendra donc le modèle :

$$h(K, 10\%) = -0.33861 + 0.06118 * \ln(K)$$

avec K qui correspond au capital moyen de la

tranche considérée.

Ensuite, on peut décider de tester ces régressions pour des plages de taux de destruction, par exemple sur 10%-20% et sur 20%-30%, au lieu de le faire point par point.

⇒ Le problème sous jacent est de savoir si les portions de courbes ainsi tracées se rejoignent aux points de jonction. On peut tomber sur des points de rebroussements, posant ainsi un sérieux problème de continuité.

Ce modèle de régression linéaire simple paraît donc limité à ce niveau.

Ainsi nous avons décidé de mettre en place un modèle plus complexe, qui tienne compte de la remarque faite auparavant sur la fonction logarithme et surtout qui ne pose pas de problème de continuité.

Chapitre 3 : Modèle non linéaire

Face à toutes ces contraintes, le modèle qui s'est imposé à nous est un modèle non linéaire de la forme :

$$h(K, t) = h(K_r, t) * \left(1 + a \cdot \ln \left(\frac{K}{K_r} \right)^b \right)$$

avec :

- a et β les paramètres du modèle
- K : capital assuré de la courbe en question.
- K_r : capital assuré de la courbe de référence.
- $h(K, t)$ la proportion de prime qui est conservée par l'assureur pour un taux de dommage t et comme capital assuré celui de la tranche correspondante.
- $h(K_r, t)$ la courbe d'exposition de référence du modèle, qui correspond à la courbe d'exposition de capital assuré moyen le plus faible, soit la courbe (1).

Ainsi on déduit une courbe d'exposition pour un capital assuré donné de la courbe de référence par notre modèle, une fois celui-ci calibré à partir des données empiriques. Cette régression non linéaire effectuée, on peut donc représenter n'importe quelle courbe d'exposition si on connaît le capital assuré.

En pratique, cela peut s'avérer très utile si l'on dispose d'un portefeuille que l'on présente sous forme de tranches. Il suffit de calculer le capital assuré moyen d'une tranche et on peut ainsi obtenir la courbe d'exposition correspondante, ce qui permet de pouvoir donner une cotation pour la tranche.

L'hypothèse sous-jacente est que le modèle ne dépend pas du découpage.

L'idée est qu'après calibration du modèle par les données empiriques, on ajuste une courbe MBBEFD sur la courbe de référence, et cela permet ensuite de déduire une courbe d'exposition correspondant à un capital assuré comme transformée de la MBBEFD.

Section 1.1 : Description et analyse

Nous allons à présent décrire ce modèle de façon plus formelle, puis construire les courbes d'exposition correspondant aux tranches précitées, de façon à comparer les courbes empiriques présentées en début de partie et les courbes obtenues par le modèle.

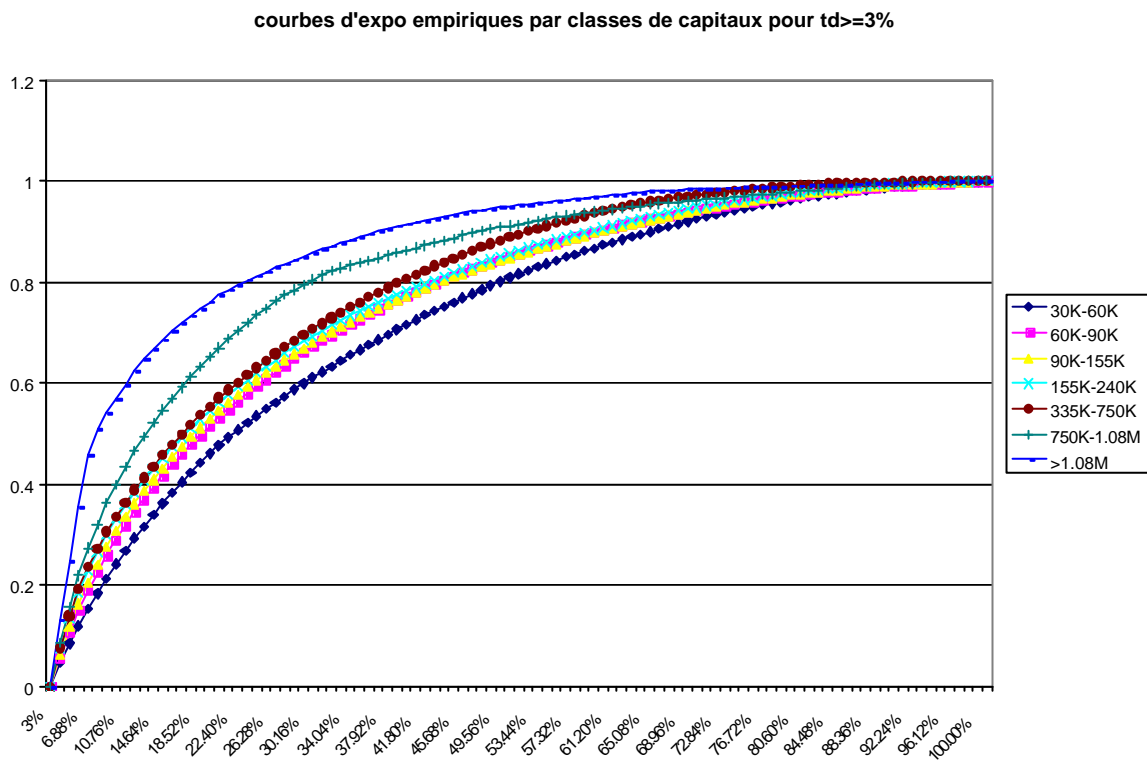
Soit la formule suivante :

$$h(K, t) = h(K_r, t) * \left(1 + a \cdot \ln \left(\frac{K}{K_r} \right)^b \right)$$

Nous avons considéré cette formule car :

- on a bien l'idée de transformée par rapport à la courbe de référence.
- lorsque $K = K_r$ on a bien $h(K, t) = h(K_r, t)$ donc on retombe bien sur la courbe de référence.

On travaille toujours avec des taux de dommage supérieurs à 3%. Les courbes d'exposition pour ces données représentées par classes de capitaux donnent (graph 10):



Ensuite, avec ces données empiriques, on utilise la procédure 'Proc NLIN' de SAS afin de déterminer les paramètres a et β du modèle.

La procédure 'NLIN' de SAS fournit des estimateurs des moindres carrés (pondérés ou non) des paramètres d'un modèle non linéaire. Les modèles non linéaires sont plus difficiles à estimer que les modèles linéaires. En particulier, certains modèles sont assez compliqués à ajuster, et on n'est pas garanti d'avoir un ajustement réussi.

L'estimation d'un modèle non linéaire est un processus itératif. On commence donc par fournir une valeur initiale pour chacun des paramètres, ici $a=1.5$ et $\beta=2$. Si on fournit au départ des plages de valeurs, la procédure évalue pour chaque combinaison de paramètres la somme des carrés résiduels et choisit la combinaison qui présente la plus petite. C'est cette combinaison qui est utilisée comme valeur initiale pour le processus itératif. Dans notre cas, en essayant avec plusieurs valeurs de départ pour l'algorithme, la procédure converge toujours vers les mêmes paramètres a et β .

Ensuite la procédure utilise l'une des cinq méthodes itératives suivantes, qu'il faut spécifier dans le programme SAS :

- ✓ méthode du gradient
- ✓ méthode de Newton
- ✓ méthode de Gauss-Newton modifiée
- ✓ méthode de Marquardt
- ✓ méthode dite DUD

Toutes ces méthodes conduisent dans notre cas au même modèle final.

Ici, il s'avère qu'il y a une forte corrélation entre les deux paramètres a et β (coeff. de corrélation: -0.89). Ainsi il paraît intéressant de regarder le modèle précédent, mais en n'utilisant qu'un seul paramètre, en fixant un des deux égal à 1.

On va donc considérer les modèles suivants :

$$h(K, t) = h(K_r, t) * \left(1 + a \cdot \ln \left(\frac{K}{K_r} \right) \right)$$

et

$$h(K, t) = h(K_r, t) * \left(1 + \ln \left(\frac{K}{K_r} \right)^b \right)$$

On va donc recommencer deux nouvelles procédures 'NLIN' sous SAS et comparer tous ces modèles afin d'en utiliser qu'un au final, en se basant sur les critères décrits ci-dessus.

On trouve :

Modèle	Somme des carrés résiduels
Avec 2 paramètres	3.7647
Avec $\mathbf{b} = 1$	3.8162
Avec $\mathbf{a} = 1$	337.1

On retient donc au final le modèle :

$$h(K, t) = h(K_r, t) * \left(1 + 0.0302 \cdot \ln \left(\frac{K}{K_r} \right) \right) \quad (\mathbf{b} = 1)$$

car il présente une somme des carrés résiduels quasiment aussi faible que celui à deux paramètres mais avec un paramètre en moins (principe de parcimonie).

Section 1.2 : Construction

Le choix du modèle étant arrêté, on peut à présent construire les courbes qui en découlent pour les tranches de capitaux que l'on a considéré plus tôt et en déduire les courbes finales sur [0, 100%] en réintégrant la partie empirique sur [0, 3%].

Ainsi, après construction des courbes empiriques à partir du fichier global (sinistres avec taux de dommage inférieur à 3% compris) sur les mêmes tranches de capitaux, on pourra comparer les courbes empiriques et les courbes obtenues par le modèle, afin de tester sa robustesse.

Formellement, ceci s'écrit :

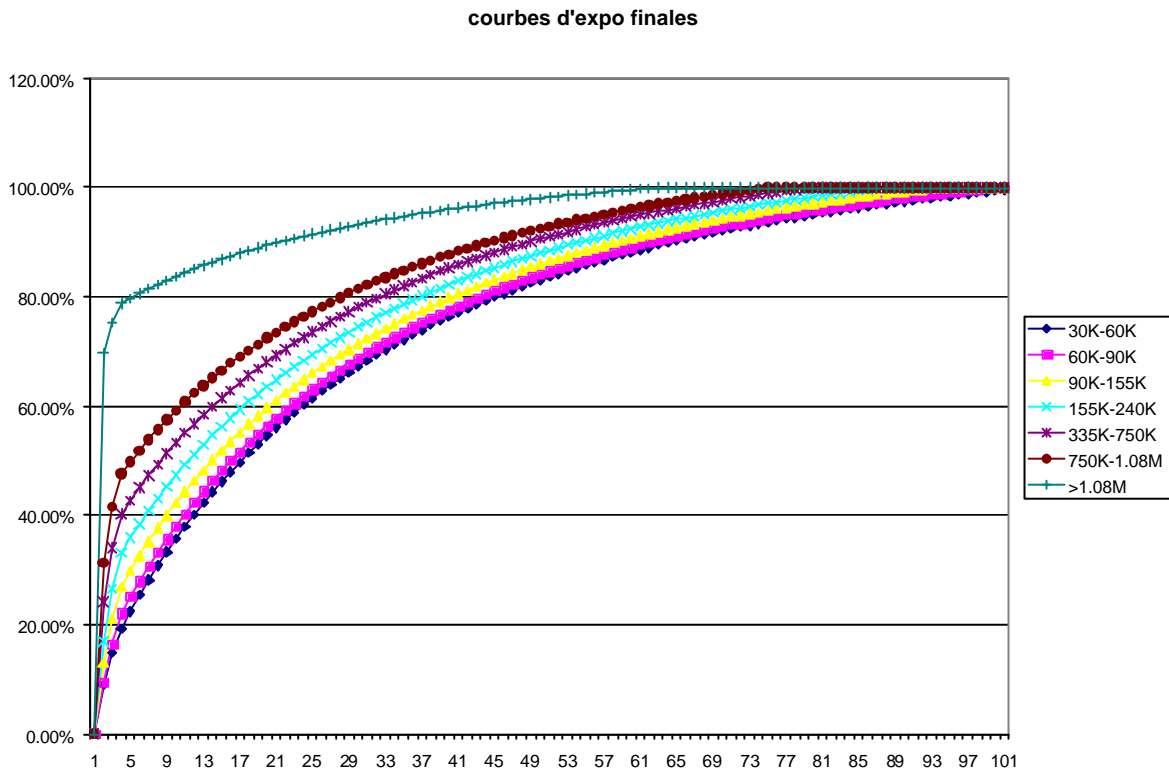
- On construit 8 courbes empiriques correspondant aux tranches choisies, pour des taux de dommage supérieurs à 3% : $C_{1/3\%}, \dots, C_{8/3\%}$, à partir desquelles on calibre le modèle (courbes présentées plus haut).
- On choisit la première courbe comme courbe de référence : $C_{réf/3\%} = C_{1/3\%}$
- On ajuste une courbe MBBEFD ou Pareto sur cette courbe de référence : $C_{1aj} = C_{réf/3\%}$ ajustée par mbbefd ou Pareto
- On applique le modèle non linéaire pour trouver les autres courbes $C_{2T/3\%}, \dots, C_{8T/3\%}$, qui sont les transformées de C_{1aj} par le modèle sur chacune des tranches.
- On repasse enfin sur l'intervalle [0, 100%] en réintégrant la partie empirique sur [0, 3%] pour obtenir : $C_{réf}, C_{2T}, \dots, C_{8T}$.
- On compare ces courbes aux courbes empiriques construites à partir de tout le fichier 'ace' pour les mêmes tranches de capitaux assurés : C_1, C_2, \dots, C_8

En pratique, on a déjà les courbes empiriques au-delà de 3%, donc notre courbe de référence.

1.2.1 Référence MBBEFD

Par ajustement MBBEFD, on trouve les paramètres suivants pour cette courbe :
 $b=0.1196$ et $g=21.1476$.

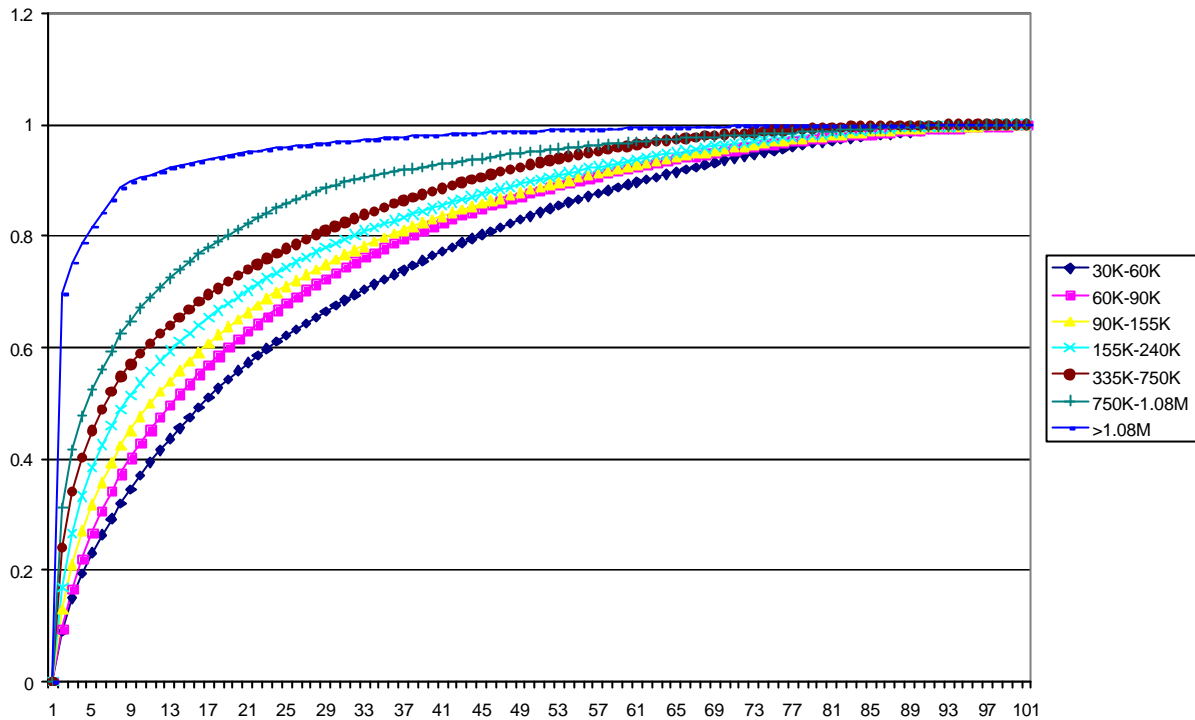
Avec le modèle on construit $C_{2T/3\%}, \dots, C_{8T/3\%}$, courbes que l'on va ramener sur $[0, 100\%]$ via la technique que nous avons déjà présentée, en tenant compte des valeurs observées de façon empirique sur $[0, 3\%]$. Le résultat est le suivant (graph 11):



On constate que les trois premières courbes sont très proches les unes des autres, on peut donc se demander si la distinction des trois tranches correspondantes était réellement nécessaire : nous aurions pu nous en dispenser mais étant donné la quantité de données dont nous disposions, nous avons pu nous le permettre.

Il convient ensuite de comparer ces courbes avec C_1, C_2, \dots, C_8 , courbes empiriques du fichier 'ace' pour les 8 tranches considérées (graph 12):

courbes d'exposition empiriques par classes de capitaux



Par une simple considération graphique, on constate que le modèle reflète plutôt bien la réalité, d'autant mieux que l'on se situe sur les tranches basses.

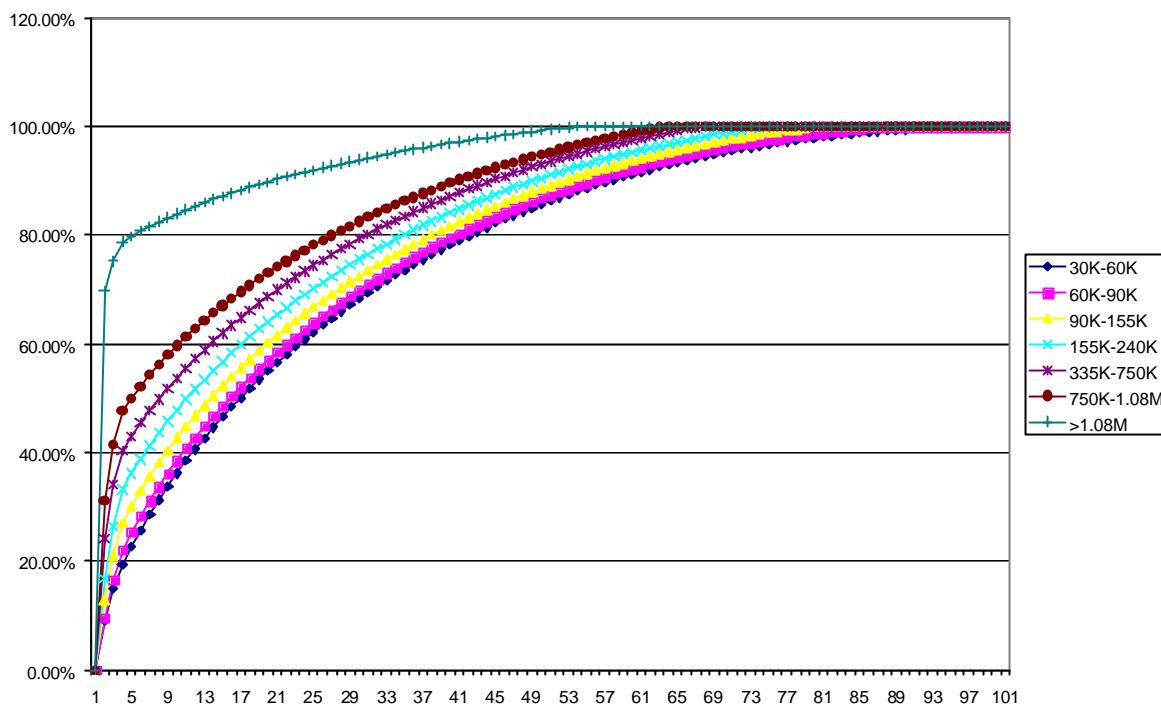
1.2.2 Référence Pareto

On modélise la courbe de référence par un ajustement Pareto, selon la méthode présentée dans la partie 'Ajustement'. Ensuite on construit les courbes correspondant aux différents capitaux assurés selon le modèle sélectionné, courbes que l'on ramène sur [0,1] selon la méthode suivante :

On a à notre disposition la courbe d'exposition empirique G sur $[0,1]$ et la courbe d'exposition de référence modélisée par Pareto au delà de 3% G^* . Ensuite la courbe ramenée sur $[0,1]$ s'obtient par (graph 13):

Courbe d'expo Pareto 3%		Courbe finale de référence
		$G(0)$
		$G(1\%)$
		$G(2\%)$
		$G(3\%)$
	\Rightarrow	...
$G^*(0)$		$\frac{G^*(x) - G^*(0)}{1 - G^*(0)}(1 - G(3\%)) + G(3\%)$
...		...
$G^*(x)$...
...		100%
$G^*(100\%)$		

courbes d'expo finales (Pareto)



La comparaison des courbes empiriques avec le modèle se trouve dans le mémoire de J.Saunier [3].

Section 1.3 : Analyse de la transformée d'une MBBEFD ou d'une Pareto par le modèle

Une autre question qu'il est légitime de soulever est : la transformée d'une MBBEFD (notre courbe référence) par le modèle est-elle encore une MBBEFD ?

Autrement dit, lorsque nous ajustons une MBBEFD ou une Pareto sur la courbe de référence et que nous déduisons les autres courbes via le modèle non linéaire, la question est de savoir si l'on retombe sur des courbes MBBEFD ou Pareto dont on peut déduire les paramètres.

1.3.1 Transformée d'une MBBEFD

Considérons une courbe MBBEFD à 2 paramètres :

$$G_{b,g}(x) = \frac{\ln\left(\frac{(g-1)b + (1-gb)b^x}{1-b}\right)}{\ln(gb)}$$

Si on reprend le modèle non linéaire, on a :

$$h(K, t) = h(K_r, t) * \left(1 + a \cdot \ln \left(\frac{K}{K_r} \right)^b \right) = G_{b_r, g_r}(t) * \left(1 + a \cdot \ln \left(\frac{K}{K_r} \right)^b \right) \text{ pour tout } t.$$

L'enjeu est donc de déterminer si h(K,t) est également une courbe MBBEFD et si oui, quels sont ses paramètres.

Ce problème revient à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\ln \left(\frac{(g_r - 1)b_r + (1 - g_r \cdot b_r)b_r^x}{1 - b_r} \right)}{\ln(g_r \cdot b_r)} * \left[1 + a \cdot \left(\ln \left(\frac{K}{K_r} \right)^b \right) \right] = \frac{\ln \left(\frac{(g - 1)b + (1 - g \cdot b)b^x}{1 - b} \right)}{\ln(g \cdot b)} \text{ pour tout } x.$$

de paramètres g et b, et où g_r et b_r sont les paramètres de la courbe MBBEFD ajustée sur la courbe de référence.

Attention : les paramètres b et g doivent être les mêmes pour chaque taux de dommage x.

Etant donné la difficulté de résolution de cette dernière équation, notre première approche consiste à regarder les différents paramètres MBBEFD des courbes transformées, pour voir si l'un des coefficients reste constant par exemple, ou si on observe une relation simple entre les deux coefficients.

Pour l'exemple présenté on trouve :

	2	3	4	6	7	8
b	0.0895	0.05589	0.03369	0.0141	0.00817	0.001421
g	23.29	27.65	33.97	51.042	67.94	194.77

Ces résultats ne sont pas aussi satisfaisants que l'on pouvait l'espérer puisque l'on n'observe pas de constance de l'un des paramètres, ni de relation simple, même par ajustement.

Ainsi nous décidons de regarder le modèle avec une courbe MBBEFD à 1 paramètre comme référence :

$$\frac{\ln \left(\frac{(g_r(c) - 1)b_r(c) + (1 - g_r(c) \cdot b_r(c))b_r(c)^x}{1 - b_r(c)} \right)}{\ln(g_r(c) \cdot b_r(c))} \left[1 + a \cdot \left(\ln \left(\frac{K}{K_r} \right)^b \right) \right] = \frac{\ln \left(\frac{(g(c) - 1)b(c) + (1 - g(c) \cdot b(c))b(c)^x}{1 - b(c)} \right)}{\ln(g(c) \cdot b(c))}$$

pour tout x, ce qui revient à résoudre un système d'une infinité d'équations à 1 inconnue c, toujours la même pour chaque équation. Chaque système a une solution (par Newton-Raphson par exemple) mais cette solution doit être identique pour toutes les équations.

Ne pouvant tester cette méthode, nous avons décidé d'effectuer quelques tests numériques.

On s'aperçoit que pour x=1, la seule possibilité pour retomber sur une courbe MBBEFD est de multiplier la courbe de référence par 1, puisque l'on tombe sur une équation du type :

$$1 * \left(1 + a \cdot \ln \left(\frac{K}{K_r} \right)^b \right) = 1$$

Donc si on considère le modèle retenu précédemment avec a non nul et β=1, les transformées de la courbe référence ne sont pas des MBBEFD. En revanche, on peut très bien ajuster des courbes MBBEFD sur ces transformées.

1.3.2 Transformée d'une Pareto

Pour la Pareto nous avons procédé exactement de la même façon que pour la MBBEFD.

Il faut savoir si il existe a_r vérifiant :

$$\left[1 - \frac{1-t^{1-a_r}}{1-a^{1-a_r}} - t \cdot \frac{1-a_r}{a_r} \cdot \frac{1-t^{-a_r}}{1-a^{1-a_r}} \right] \cdot \left[1 + \Delta \cdot \ln \left(\frac{K}{K_r} \right)^b \right] = 1 - \frac{1-t^{1-a}}{1-a^{1-a}} - t \cdot \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-t^{-a}}{1-a^{1-a}}$$

Le problème se résout comme précédemment :

$$\text{En } t=1, \text{ on tombe sur } \left[1 + \Delta \cdot \ln \left(\frac{K}{K_r} \right)^b \right] = 1$$

Ainsi, pour le modèle que nous avons considéré, la transformée d'une Pareto n'est pas une Pareto. On peut toujours ajuster des courbes d'exposition basée sur une distribution Pareto sur les transformées.

Conclusion

Les courbes d'exposition sont amenées à jouer un rôle de plus en plus important dans l'aspect tarification en réassurance. Cette méthode de cotation vient en appui d'autres méthodes et il paraissait donc primordial de pouvoir modéliser de telles courbes, d'en comprendre les subtilités et de cerner les éléments fondamentaux qui les composent.

Nous avons donc vu au cours de cette étude comment ajuster des courbes théoriques analytiques (MBBEFD ou Pareto) sur des courbes empiriques, aussi bien par la méthode des moindres carrés qu'avec la méthode du maximum de vraisemblance, avec des vérifications graphiques à l'appui pour cette dernière. On dispose ainsi de quelques courbes empiriques, mais on peut désormais en construire une infinité.

La véritable nouveauté provient de cette méthode du maximum de vraisemblance, qui nous a permis de trouver des intervalles de confiance sur ces courbes analytiques, fournissant ainsi un encadrement de cet ajustement.

Quant au modèle, il nous fournit des résultats proches de ce que l'on observe empiriquement et on a donc la confirmation du lien présupposé entre courbes d'exposition et capital assuré. Nous avons modélisé ce lien de façon non linéaire, au travers d'une formule qui tient compte d'une courbe référence, d'un capital référence et de la fonction logarithme qui joue un rôle prépondérant dans le lien en question.

Références :

[1] BERNEGGER S. (1997) : The Swiss Re exposure curves and the MBBEFD distribution class.

Astin Bulletin Vol 27, No 1 1997, pp 99-111

[2] MACK T. (1989) : 'Aufteilung des Risikos bei Vereinbarung einer Franchise'. Journal des Actuaires Allemands, 'Deutsche Gesellschaft fur Versicherungsmathematik'.

[3] SAUNIER J. (ISFA : 2005) : 'Détermination des courbes d'exposition en fonction du capital assuré en branche incendie et risques annexes. Comparaison des distributions MBBEFD et Pareto'.

[4] PARTRAT C., BESSON J.L. (2005) : *Assurance non-vie, modélisation, simulation*. Economica