

## **Bewertung von Renten bei mehrfach abgestufter Sterbetafel**

Disch, Dr. Burkhard  
DAV – Deutsche Aktuarvereinigung

68723 Schwetzingen / Germany  
Helmholtzstraße 94  
Tel (Germany) 0049 6202 26395  
oder (Germany) 0049 621 427 1279  
Fax (Germany) 0049 621 427 8960  
E-Mail [Burkhard.Disch@surfeu.de](mailto:Burkhard.Disch@surfeu.de)

### Abstract

Gegenstand der Ausarbeitung ist die Darstellung einer Rechentechnik zur Bestimmung des Barwertes von Rentenzahlungen für Kollektive von Rentenversicherungen im Rentenbezug. Aus den durch Bestandsauswertungen gewonnenen rohen Sterblichkeiten über mehrere Beobachtungsjahre werden unter Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung innerhalb der Beobachtungsperiode direkt die Barwerte aus den ausgeglichenen Sterblichkeiten ermittelt, ohne nachträgliche Differenzierung nach Beobachtungsjahr. Das Formelwerk wird vereinfacht mit Hilfe der Laplace-Transformationen.

Aufsetzend auf die Vorgehensweise zur Bewertung, wird eine analoge Vorgehensweise zur Bewertung von segmentierten Rentnerkollektiven dargestellt (Raucher/Nichtraucher etc.). Es wird gezeigt, dass mit Hilfe von approximationstheoretischen Ansätzen das Formelwerk im Wesentlichen auf die Formeln zur Vorgehensweise ohne Segmentierung zurückgeführt werden können. Die dargestellten Vorgehensweisen sind insbesondere für kleine und mittlere Rentnerbestände anwendbar. Beispiele demonstrieren die Algorithmen.

### Keywords

Rentnerkollektiv, disjunkte Segmentierung, Barwert, Laplace-Transformation, Sterblichkeitsverbesserung, Norm linearer Räume, Approximationstheorie

## 1 EINLEITUNG

Die Bedeutung der privaten Rentenversicherung in Deutschland hat in den letzten Jahren stark zugenommen. Laut der Arbeitsgruppe „Biometrische Rechnungsgrundlagen“ der Deutschen Aktuarvereinigung entfielen ca. 46% des laufenden Beitrags des Neuzugangs an Lebensversicherungen im Jahr 2003 auf Einzelrentenversicherungen und fondsgebundene Rentenversicherungen. Entsprechend ist der Anteil von Rentenversicherungen an der Gesamtzahl von Hauptversicherungen im Bestand von ca. 5% Ende 1996 auf ca. 16% Ende 2003 gestiegen (vgl. [1]). Da davon auszugehen ist, dass auch in Zukunft die Rentenversicherung eines der wichtigsten Produkte in der deutschen Lebensversicherung bleiben wird, rückt die Bewertung von Rentenkollektiven – und hier speziell von Kollektiven von Rentenversicherungen im Rentenbezug – stärker in den Fokus der Aufmerksamkeit eines wirksamen Bestandscontrollings.

Ein wesentliches Problem im Zusammenhang mit dem Bestandscontrolling ist die Projektion des Sterblichkeitstrends aus der bisherigen Sterblichkeitsentwicklung (vgl. hierzu Abschnitt 4 von [1]). Bei der Auswahl des Modells wird allgemein von einem alters- und / oder geburtsjahresabhängigen Sterblichkeitstrend ausgegangen, in der Form

$$\frac{q_{t+1}(x)}{q_t(x)} = e^{-H(x)-G(t+1-x)}, \quad (1)$$

wobei  $q_t(x)$  die Sterblichkeit im Alter  $x$  und  $t$  das Geburtsjahr (resp. aktuelles Jahr) darstellt.  $H$  und  $G$  sind geeignete reelle Funktionen, die letztlich die Verbesserung der Sterblichkeiten zum Ausdruck bringen sollen. Die Verbesserung der Sterblichkeit in Abhängigkeit vom Beobachtungsjahr wird dann relativ zu einer Basistafel gemessen, die die Sterblichkeit für genau das, der Basistafel zugrunde liegende, eine „Basisgeburtsjahr“ wiedergibt.

Unabhängig von der Art des Modells wird bei der Bewertung eines Rentnerbestandes von lebenslangen Leibrenten ein Barwert der Rentenzahlungen gebildet (wir unterstellen hierbei, dass die kalkulatorischen Verwaltungskosten im Rentenbezug ebenfalls wie eine Rente behandelt werden und verweisen bei den folgenden Aussagen hierauf nicht mehr speziell hin) bezüglich eines Zeitpunktes zu jedem im Bestand vorhandenen Alter. Hierbei geht der Verbesserungstrend der Sterblichkeit wesentlich mit ein. Diese Barwerte werden mit unternehmenseigenen Rechnungsgrundlagen und Annahmen über die Sterblichkeitsverbesserung gebildet. Das heißt aber, dass die rohen Sterblichkeiten nach Alter und Geburtsjahr (oder Beobachtungsjahr) aufgegliedert werden müssen. Der Wert des Bestandes ergibt sich dann durch Vergleich mit vorhandenen Aktiva. Bei der Bestandsbewertung beschränken wir uns hier auf die Frage nach der Bestimmung des Barwertes zukünftiger Rentenzahlungen.

Um die notwendige Menge an Daten zu erhalten, ist es allgemein üblich mehrere - etwa  $n$  - Geschäftsjahre (= Beobachtungsjahre) zu betrachten. Die Sterblichkeit im Alter  $x$  wird so über  $n$  Jahre gemessen, also zu  $n$  Geburtsjahren bzw. Beobachtungsjahren (um nicht immer beide Möglichkeiten darzustellen, beschränken wir uns auf „Beobachtungsjahre“). Als ausgleichende relative Häufigkeit wird ein gewichtetes Mittel dieser  $n$  Werte genommen. Da die Barwertformeln komplex werden würden und bei Wechsel des Beobachtungsjahres der Barwert neu berechnet werden muss, geht die Sterblichkeitsverbesserung - über die  $n$  Beobachtungsjahre hinweg - häufig nicht mit ein. Das ist nicht notwendig. Ziel der Ausarbeitung ist zunächst, hierfür eine neue Rechenmethode vorzustellen, die eine Berücksichtigung des Sterblichkeitstrends gestattet, mit einer vereinfachten Berechnung der Barwerte für jedes einzelne Beobachtungsjahr.

Bei der Berechnung der Barwerte im Rahmen dieser Ausarbeitung gehen wir deshalb von der Barwertdefinition nach der von Reichel [6] dargestellten Methode zur Berechnung von

Barwerten in der Lebensversicherungsmathematik aus. Demnach setzen wir eine Bewertungsfunktion

$$v(x) = e^{-\int_0^x \varphi(\tau) d\tau} \quad (2)$$

mit einer stetigen Zinsintensität  $\varphi(\tau)$  und im Falle einer Ausscheidewahrscheinlichkeit aus dem Kollektiv mit nur einem Merkmal eine Funktion  $F(x)$  definiert durch  $F(x) = P(\eta \leq x)$  voraus. Hierbei ist die stochastische Variable  $\eta$  der untere Grenzwert aller Zeitpunkte  $x$ , für welche das Objekt das ursprünglich vorhandene Merkmal (hier also „leben“) nicht mehr besitzt. Weiterhin gilt  $F(0) = 0$  und  $F(x) = 1$  für  $x \geq \omega$ , wenn das Objekt spätestens nach dem endlichen Zeitpunkt  $\omega$  das Kollektiv verlässt. Unterstellen wir im Zeitraum  $[a, b]$  eine Erlebensfallleistung  $R(x)$  für  $x \in [a, b]$  ( $R$  rechtsseitig stetige Versicherungsfunktion), so ergeben sich die Barwerte

$$\ddot{a}(a, b; v, F, R) = \frac{1}{v(a) \cdot (1 - F(a))} \cdot \int_a^{(-)b} v(\tau) \cdot (1 - F(\tau)) dR(\tau) \quad (3)$$

für die vorschüssige Erlebensfallleistung,

$$a(a, b; v, F, R) = \frac{1}{v(a) \cdot (1 - F(a))} \cdot \int_a^{(+)b} v(\tau) \cdot (1 - F(\tau)) dR(\tau)$$

für die nachschüssige Erlebensfallleistung. Dabei ist allgemein  $\int_a^{(\pm)b} g(\tau) dh(\tau)$  das rechts-

bzw. linksseitige Stieltjes-Schärfische-Integral von  $g(\tau)$  nach  $h(\tau)$  (vgl. Reichel [6]). Gehen wir davon aus, dass  $F(x)$  im deterministischen Modell als geschlossener analytischer Ausdruck vorliegt - beispielsweise bei Sterbegesetzen und beim Ausgleichen von rohen Häufigkeiten mit Funktionenmengen ist dies der Fall -, wird die Auswertung der Integrale in der vorliegenden Form schwierig und im allgemeinen werden Näherungsverfahren angewendet. Die am häufigsten angewendete Methode ist das Approximieren durch stückweise konstante Funktionen. Die Zinsintensität  $\varphi(\tau)$  wird hier als konstante Funktion vorausgesetzt, und die Versicherungsdauer  $[a, b]$  wird in Kalkulationsabschnitte  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  unterteilt. Die Funktion  $F(x)$  wird in den Kalkulationsabschnitten  $[x_i, x_{i+1})$ ;  $i = 0 \dots n-1$  konstant gleich  $F(x_{i+1})$  gesetzt und die Sterblichkeit durch  $1 - F(x_{i+1})$  definiert. Leistungen werden hierbei als vor- oder nachschüssig angenommen - oder vereinfachende Annahmen zur näherungsweisen Darstellung stetiger Zahlungen gemacht. Die Integrale reduzieren sich dadurch auf einfache Summen.

$$\ddot{a}(a, b; v, F, R) = \frac{1}{v(a) \cdot (1 - F(a))} \cdot \sum_{i=1}^n v(x_i) \cdot (1 - F(x_{i-1})) \cdot (R(x_i) - R(x_{i-1}))$$

der Erlebensfallbarwert bei vorschüssiger Zahlweise

$$a(a, b; v, F, R) = \frac{1}{v(a) \cdot (1 - F(a))} \cdot \sum_{i=1}^n v(x_i) \cdot (1 - F(x_i)) \cdot (R(x_i) - R(x_{i-1}))$$

der Erlebensfallbarwert bei nachschüssiger Zahlweise.

Bei der dargestellten Vorgehensweise werden die Informationen über  $F(x)$  zwischen den  $x_i$  vernachlässigt, um einen möglichst einfachen Formelapparat zu erhalten. Eine exakte und genauso einfache Berechnung der Barwerte kann aus nahe liegenden Gründen im allgemeinen Fall nicht erwartet werden. Sinnvoll wäre es aber, ein Verfahren zur genaueren Berechnung so anzuwenden, dass die Integrale (3) in geschlossener Form ausgewertet werden können - auch wenn die zugrunde liegenden Funktionen komplexer sind. Dadurch würden ver-

einfachende Annahmen vermieden und etwa ein stetiger Zahlungsstrom an Verwaltungskosten bei Erleben eines Zeitpunktes im Rahmen von Ertragswertuntersuchungen oder eben bei der Bewertung des Rentenkollektivs, auch als stetige Funktion abgebildet werden.

Für die folgenden Ausführungen setzen wir  $a = 0$ ,  $F(0) = 0$  und  $R(x) = x$  und

$$I(f, x_0) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0))} \cdot \int_{x_0}^b v(\tau) \cdot f(\tau) d\tau \quad (4)$$

mit  $f(x) = (1 - F(x)) \cdot R'(x)$ .

Unter diesen Voraussetzungen sind der vor- und nachschüssige Rentenbarwert gleich. Die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$q(x, x + \tau) = \frac{F(x + \tau) - F(x)}{1 - F(x)} \quad (5)$$

heißt die totale Ausscheidewahrscheinlichkeit bezüglich  $F$ . Die Ausscheideintensität ist definiert durch

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h \cdot (1 - F(x))} = \frac{F'(x)}{1 - F(x)}.$$

$F(x)$  ist damit eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mu(x) \cdot (1 - F(x)) = F'(x) \quad (6)$$

mit der Sterblichkeitsintensität  $\mu(x)$  zum Alter  $x$ . Liegt der Anfangswert  $F(x_0)$  vor, so kann  $F(x)$  berechnet werden durch

$$F(x) = 1 - (1 - F(x_0)) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \mu(\tau) d\tau}. \quad (7)$$

Nach der Bestandsauswertung auf die Sterblichkeit der Rentner liegt eine, erst aufgrund der Mittelbildung über die  $n$  Beobachtungsjahre vom Beobachtungsjahr unabhängige, Sterblichkeitsverteilung des Gesamtkollektivs an Rentnern vor.

Im Gegensatz zu dieser Vorgehensweise beobachten wir das Kollektiv über  $n$  Beobachtungsjahre und charakterisieren ein Element (versicherte Person) des Gesamtkollektivs erst eindeutig durch ein Alter und ein Beobachtungsjahr. Eine Person kann bis zu  $n$  mal im Kollektiv vorkommen, jeweils zu verschiedenen Beobachtungsjahren mit  $n$  verschiedenen Altern. Alternativ dazu kann die Person auch dargestellt werden durch Alter und Geburtsjahr. Für die nachfolgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf die Charakterisierung durch das Alter  $x$  und das Beobachtungsjahr  $t$ . Hieraus folgt – aufgrund der erwähnten Mittelbildung – ein zugehöriges  $\mu(x)$  und ein  $F(x)$ . Wir interpretieren die Sterblichkeitsverbesserung als Selektion auf dieses Gesamtkollektiv. Deshalb „segmentieren“ wir das Gesamtkollektiv (disjunkt) nach den (Geburts-) Beobachtungsjahren (vgl. [4]). In manchen Beispielen werden wir zur Vereinfachung auch nach Beobachtungsjahresgruppen segmentieren, das heißt, wir fassen alle Segmente (oder „Teilkollektive“) zusammen, die zu einer bestimmten Beobachtungsjahresgruppe gehören. Die Gleichungen zur Beschreibung einer Segmentierung können wie folgt zusammengefasst werden.

Ist ein Kollektiv „segmentiert“, so ist es unterteilt in beispielsweise zwei disjunkte Teile,  $K_1$  der Teil mit den Personen zur „normalen“ Sterblichkeit (Basiskollektiv, das dem Beobachtungsjahrgang der Basistafel entspricht) und  $K_2$ , der Teil mit dem Rest (Teilbestand mit einem Beobachtungsjahr ungleich dem des Basiskollektivs).  $\mu_1(x)$ ,  $\mu_2(x)$  seien die jeweiligen Sterblichkeitsintensitäten für die betrachteten Teilbestände und  $r_1(x)$ ,  $r_2(x)$  seien die Anteile der Teilbestände am ganzen Kollektiv (vgl. [4]), das heißt,

$$\mu(x) = r_1(x) \cdot \mu_1(x) + r_2(x) \cdot \mu_2(x).$$

Wegen  $r_1(x) + r_2(x) = 1$ , erhalten wir

$$\mu(x) = r_1(x) \cdot (\mu_1(x) - \mu_2(x)) + \mu_2(x).$$

Bei der Segmentierung des Kollektivs sind  $r_1(x)$  and  $\mu(x)$  bekannt, aufgrund unseres statistischen Materials - etwa aus der Bestandsauswertung. Die Differenz  $\hat{\mu}(x) = \mu_1(x) - \mu_2(x)$  wird mit Hilfe von (1) bestimmt. Sie beschreibt, um wie viel der selektierte Teil besser / schlechter ist als der Rest des Kollektivs.  $\hat{\mu}(x)$  ist damit gegeben. Bei der Berechnung von (3) für den Teilbestand  $K_2$  mit der Sterbeintensität  $\mu_2(x)$  wird im Allgemeinen die Beziehung

$$\mu(x) - r_1(x) \cdot \hat{\mu}(x) = \mu_2(x)$$

ausgenutzt und dann die (3) entsprechenden Formeln angewendet. Das heißt, wir berechnen die Barwerte für die "segmentierten" Teile unabhängig von den Integralen für den ganzen Bestand, der der Segmentierung zugrunde lag.

Intuitiv betrachtet würden wir aber doch erwarten, dass die Barwerte für die Teilbestände mit Hilfe des Barwertes der Basistafel in einfacher Weise sich ergeben. Wir stellen hier also die Frage, wie kann das Integral

$$I^{(2)}(f, x_0) = \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot f^{(2)}(\tau) d\tau ; f^{(2)}(x) = \left(1 - F^{(2)}(x_0)\right) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \mu_2(\tau) d\tau} \cdot R'(x) \quad (8)$$

berechnet werden, unter Zuhilfenahme von  $I(f, x_0)$ ? Und speziell, wie könnte eine solche „Hilfe“ aussehen? Wir zeigen einen Weg unter Verwendung von Laplace-Transformationen auf.

Dazu approximieren wir  $f$  bezügliche spezieller Funktionenmengen. Formen wir (8) um in ein Integral, bei dem der Integrand in ein Produkt aus dem Integranden des Barwertes für die Basistafel und einen Integranden für die Selektion zerfällt, so lassen sich diese zum Beispiel getrennt in der Form  $\sum_{k=0}^{\lambda} a_k(\bar{t}) \cdot e^{-k \cdot \tau}$ ;  $a_k \in \mathbb{R}$  und  $\sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot e^{-m \cdot \tau}$ ;  $b_m \in \mathbb{R}$  approximieren. Die

Ausgleichsfunktionenmenge sind als so genannte „Originalfunktionen“ der Laplace-Transformationen gewählt, wodurch sich eine Näherung der Form

$$I(f, x_0) \approx \frac{1}{v(x_0)} \cdot \sum_{k=0}^{\lambda} a_k(\bar{t}) \cdot \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot \int_{x_0}^{\infty} e^{-s \cdot \tau} \cdot e^{-m \cdot \tau} \cdot e^{-k \cdot \tau} d\tau, \quad (9)$$

ergibt. Hierauf wenden wir die Laplace-Transformationen an, die durch die zugehörigen "Bildfunktionen" das Integral (9) als einfache algebraische Operationen lösen und in einer Form, bei der bei wechselndem Beobachtungsjahr keine neue Lösung des Integrals (9) mehr notwendig ist, sondern der Barwert durch eine einfache Rechnung aus dem Barwert bezüglich der Tafel des Gesamtkollektivs abgeleitet wird. Es ist also nicht notwendig bei der Berechnung der Sterblichkeiten für die einzelnen Barwerte, die Sterblichkeitsverbesserung bei der Mittelbildung zu berücksichtigen, sondern sie geht durch einfache algebraische Operationen im Rahmen der expliziten Lösung eines Integrals der Form (9) durch Laplace-Transformationen mit ein.

Zusätzlich geben wir eine Möglichkeit an, den Fall des geteilten Rentnerkollektivs zu behandeln, das heißt das Kollektiv ist selbst zusätzlich unterteilt nach geographischen, beruflichen oder soziologischen Kriterien die für wesentlich erachtet werden und deshalb eine getrennte Bewertung erforderlich machen. Die Barwerte bezüglich dieser zusätzlichen Selektion sind ebenfalls mit der vorgelegten Theorie und den Formeln berechenbar und - unter Verwendung approximationstheoretischer Ansätze - praktisch ohne zusätzliche Approximation.

## 2 PROBLEMSTELLUNG

Das Ziel der Untersuchung ist, den Barwert des Aufwands für zukünftige Rentenzahlungen eines Bestandes an Rentenversicherungen im Rentenbezug mit laufenden jährlichen Renten anzugeben. Das heißt wir bewerten die Rentenzahlungen eines Bestandes an Rentenversicherungen in der Form

$$\text{Aufwand für zukünftige Rentenzahlungen} = \sum_{x=0}^{\omega} \sum_t R_{x,t} \cdot \ddot{a}(x, v, F, t) \quad (10)$$

wobei  $R_{x,t}$  der Anteil der Rentenzahlungen für x-jährige Rentner mit Beobachtungsjahr t am Gesamtkollektiv ist und

$$\ddot{a}(x, v, F, t) = \frac{1}{v(x) \cdot (1 - F(x, t))} \cdot \int_x^{\omega} v(\tau) \cdot (1 - F(\tau, t)) d\tau, \quad (11)$$

entsprechend zu (3) der Barwert einer lebenslangen Rente 1 im Alter x mit Beobachtungsjahr t. Im Unterschied zur Darstellung in (3) ist der Barwert nur vom Eintrittsalter x, der Diskontierungsfunktion v und F abhängig. F ist allerdings von x und dem Beobachtungsjahr t abhängig – im Gegensatz zu (3), da hier die Sterblichkeitsverbesserung mit berücksichtigt

wird. Die Gesamtrente über alle Beobachtungsjahre beträgt damit  $\sum_t \sum_{x=0}^{\omega} R_{x,t}$ .

Das Gesamtkollektiv segmentieren wir nach dem Beobachtungsjahr t in n disjunkte Teilbestände  $K_t$ ;  $t = 1, \dots, n$ . Weiterhin ergibt sich daraus die Gesamtsterbeintensität  $\mu(x)$  zum Alter x aus den Sterbeintensitäten  $\mu(x, t)$  der n Teilbestände  $t = 1, \dots, n$  – das heißt der n Beobachtungsjahre -, gewichtet mit dem jeweiligen Anteil am Kollektiv  $r_t(x)$ , mit positiven Funktionen  $0 \leq r_t(x) \leq 1$  für alle Alter x und jedes Beobachtungsjahr t. Im Unterschied zu  $R_{x,t}$  – das den Anteil der Rentenzahlung beschreibt – steht  $r_t(x)$  für den Anteil an den versicherten Risiken im Gesamtkollektiv der Rentenbezieher bei Berücksichtigung der Beobachtungsjahre. Das heißt

$$\mu(x) = \sum_{t=1}^n \mu(x, t) \cdot r_t(x). \quad (12)$$

Wir zeichnen einen Beobachtungsjahrgang  $t_0$  aus und bezeichnen die Verteilungsfunktion  $F(x, t_0)$  als Basisverteilungsfunktion. Damit liegen für den betrachteten Beobachtungsjahrgang die Funktionen  $\mu(x, t_0)$  bzw.  $F(x, t_0)$  vor. Mit (1) und (5) bilden wir mit der Basisverteilungsfunktion die Verhältnisse zum beliebigen Beobachtungsjahr t

$$s_t(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q_t(x, x+h)}{q_{t_0}(x, x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, t) - F(x, t)}{1 - F(x, t)} \cdot \frac{1 - F(x, t_0)}{F(x, t_0+h) - F(x, t_0)}. \quad (13)$$

$s_t(x)$  beschreibt damit die Veränderung der Sterblichkeit in einem differentiell kleinen Zeitraum  $[x, x+h)$  relativ zur Basisverteilungsfunktion. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir hier alle Verhältnisse bezogen auf eine Basisverteilungsfunktion mit strikt positiver Ausscheidewahrscheinlichkeit für alle x. Wir unterstellen im folgenden, dass mit  $h \rightarrow 0$   $q_{t_0}(x, x+h) > 0$  ist (d. h. die Ausscheidewahrscheinlichkeit aus dem Teilbestand der Basistafel ist für alle betrachteten x größer Null).  $s_t(x)$  ist damit für alle t definiert. Durch Erweiterung mit h und Grenzwertbildung  $h \rightarrow 0$  ergeben sich für alle  $t = 1, \dots, n$  die Gleichungen

$$s_t(x) = \frac{(1 - F(x, t_0)) \cdot F'(x, t)}{(1 - F(x, t)) \cdot F'(x, t_0)}, \quad t = 1, \dots, n.$$

Dabei bedeutet  $F'(x, t)$  die Ableitung der Funktion  $F(x, t)$  nach  $x$  bei festem Beobachtungsjahr  $t$ . Es folgt mit (6)  $\mu(x, t_0) \cdot s_t(x) = \mu(x, t)$  für alle  $t$  und  $x$ . (14)

Offensichtlich ist  $0 \leq s_t(x)$  und  $s_{t_0}(x) = 1$ . Ist die Basisverteilungsfunktion vorgegeben, so ist mit (6) für alle  $t$   $\mu(x, t) \cdot (1 - F(x, t)) = F'(x, t)$  oder unter Anwendung von (12)

$$\mu(x) = \sum_{t=1}^n \frac{F'(x, t)}{1 - F(x, t)} \cdot r_t(x) \quad (15)$$

und (14) angewendet auf die Teilbestände

$$\mu(x, t_0) \cdot s_t(x) \cdot (1 - F(x, t)) = F'(x, t). \quad (16)$$

Bei gegebenen Verhältnissen wie in (1) ist die Verteilungsfunktion für jedes  $t$  gegeben durch die Lösung eines Systems von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Hinzu kommen noch die Anfangsbedingungen  $F(0, t) = 0$  für alle  $t$ . Wir wollen die Lösung explizit angeben. Hierzu ist die Funktion  $\tilde{\mu}(x)$  hilfreich, definiert durch

$$\tilde{\mu}(x) = \frac{\mu(x)}{\sum_{t=1}^n r_t(x) \cdot s_t(x)}. \quad (17)$$

Die Funktion  $\tilde{\mu}(x)$  ist gerade eine mittlere Sterblichkeitsintensitätsfunktion, welche die gemessene Gesamtsterbeintensität gewichtet mit den Sterbeintensitäten der einzelnen Teilbestände nach Beobachtungsjahren beschreibt. Wir bezeichnen deshalb diese als "mittlere Intensitätsfunktion" bzgl. der Segmentierung nach Beobachtungsjahren des Bestandes. Zur Motivation des Begriffes betrachten wir das Beispiel  $n = 3$ , mit den von  $x$  unabhängig konstanten Funktionen (Basistafel  $t_0 = 1$ )

$$s_1(x) = 1; s_2(x) = 1,1; s_3(x) = 0,8; r_1(x) = 0,4; r_2(x) = 0,35; r_3(x) = 0,25.$$

Wir unterteilen also den Gesamtbestand in eine mittlere Beobachtungsjahresgruppe für  $t = 1$  bei einem Bestandsanteil von 40 % und sowohl eine Beobachtungsjahresgruppe mit höherer Sterbeintensität als auch eine mit niedrigerer Sterbeintensität – mit einem Bestandsanteil von 35 % bzw. 25 %. Es ist dann  $\tilde{\mu}(x) = \frac{\mu(x)}{0,985}$  nach Formel (17).

Wir unterstellen für die Alter  $x = 1, \dots, 4$  die folgenden konstanten Sterbeintensitäten  $\mu(x)$ . Daraus ergeben sich die mittleren Sterbeintensitäten  $\tilde{\mu}(x)$  (Angaben in ‰)

Tabelle 1; Beispiel zu mittleren Sterbeintensitäten

x	$\mu(x)$	$\tilde{\mu}(x)$	(A)	(B)
1	0,5	0,5076	0,5682	0,4717
2	1,0	1,0152	1,1364	0,9434
3	1,5	1,5228	1,7045	1,4151
4	2,0	2,0305	2,2727	1,8868

Legende: (A)  $\tilde{\mu}(x)$  im Falle  $r_2(x) = 0; r_3(x) = 0,6$  für alle  $x$   
 (B)  $\tilde{\mu}(x)$  im Falle  $r_2(x) = 0,6; r_3(x) = 0$  für alle  $x$

$\tilde{\mu}(x)$  stellt also die "Mittelfunktion" für jedes  $x$  bezüglich der Gewichtungsfunktionen  $r_t(x)$  dar, zwischen den Extremszenarien " $\mu(x)$  ist aus einem Bestand ohne Beobachtungsjahre mit besserer Sterblichkeit in Relation zur Basistafel" und „ $\mu(x)$  ist aus einem Bestand ohne Beobachtungsjahre mit schlechterer Sterblichkeit in Relation zur Basistafel entstanden". Der Funktion  $\tilde{\mu}(t)$  kommt im folgenden eine zentrale Bedeutung zu. Damit die Funktion  $\tilde{\mu}(t)$  immer gebildet werden kann, setzen wir für die Segmentierung nach Beobachtungsjahren voraus:

(I) Die Funktion  $\sum_{i=1}^n r_i(x) \cdot s_i(x)$  ist strikt positiv und integrierbar in  $x$ .

(II)  $\sum_{t=1}^n r_t(x) = 1$  und  $r_t(x) \geq 0$  für alle  $x$  und  $t$ . (18)

Mit dieser Festlegung geben wir zunächst die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems (16) an.

### 2.1 Satz:

Für eine gegebene Segmentierung nach Beobachtungsjahren sei (18) erfüllt. Dann existiert genau eine Lösungsmenge des Systems von Differentialgleichungen (16) und für die Verteilungsfunktionen  $F(x, t)$  zu den Beobachtungsjahren  $t = 1, \dots, n$  gilt jeweils:

$$F(x, t) = 1 - (1 - F(x_0, t)) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \tilde{\mu}(\tau) \cdot s_t(\tau) d\tau} \quad (19)$$

mit gegebenem Anfangswert  $F(x_0, t)$  und  $F'(x, t) = \tilde{\mu}(x) \cdot s_t(x) \cdot (1 - F(x_0, t)) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \tilde{\mu}(\tau) \cdot s_t(\tau) d\tau}$ .

Beweis:

Aus (6) und (14) folgt

$$\frac{F'(x, t)}{1 - F(x, t)} = \frac{s_t(x) \cdot F'(x, t_0)}{1 - F(x, t_0)} \quad \text{für alle } t \text{ und } x. \quad (20)$$

Diese Gleichung setzen wir in (15) für alle  $t$  ein und erhalten durch Ausklammern

$$\mu(x) = \frac{F'(x, t_0)}{1 - F(x, t_0)} \cdot \sum_{t=1}^n r_t(x) \cdot s_t(x). \quad (21)$$

Mit (17) und aufgrund der strikten Positivität von  $\tilde{\mu}(t)$  erhalten wir nach Division

$$F'(x, t_0) = \tilde{\mu}(x) - \tilde{\mu}(x) \cdot F(x, t_0). \quad (22)$$

Es folgt die Lösung der Differentialgleichung

$$F(x, t_0) = 1 - (1 - F(x_0, t_0)) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \tilde{\mu}(\tau) d\tau} \quad \text{und} \quad F'(x, t_0) = \tilde{\mu}(x) \cdot (1 - F(x_0, t_0)) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \tilde{\mu}(\tau) d\tau}$$

mit dem bekannten Algorithmus für  $t_0$ , das Basisbeobachtungsjahr.

Für  $t \neq t_0$  ergibt sich aus (20) die Darstellung

$$F'(x, t) = \tilde{\mu}(x) \cdot s_t(x) - \tilde{\mu}(x) \cdot s_t(x) \cdot F(x, t)$$

und damit

$$F(x, t) = 1 - (1 - F(x_0, t)) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \tilde{\mu}(\tau) \cdot s_t(\tau) d\tau} \quad \text{und} \quad F'(x, t) = \tilde{\mu}(x) \cdot s_t(x) \cdot (1 - F(x_0, t)) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \tilde{\mu}(\tau) \cdot s_t(\tau) d\tau}.$$

Unter Beachtung der Anfangsbedingungen  $F(x_0, t)$  ist die Behauptung gezeigt. ◀

Damit besitzen wir zwar die Garantie einer eindeutigen Lösung in praxisrelevanten Fällen.

Da aber das Integral  $\int_{x_0}^x \tilde{\mu}(\tau) \cdot s_i(\tau) d\tau$  nur in seltenen Fällen durch eine explizite Funktion darstell-

bar sein wird, sind wir auf Näherungen durch numerische Integration angewiesen. Um dies zu vermeiden formen wir (19) um, mit dem Ziel die Theorie der Laplace-Transformationen auf die Barwertberechnung anwenden zu können. Mit (11) liegt das Problem vor, wie

$$\ddot{a}(x_0, v, F, t) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, t))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot (1 - F(\tau, t)) d\tau \quad (23)$$

berechnet werden kann mit Hilfe von (4):

$$I(f, x_0) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot (1 - F(\tau)) d\tau. \quad (24)$$

Wegen (19) ist

$$F(x, t) = 1 - (1 - F(0, t)) \cdot e^{-\int_0^x \tilde{\mu}(\tau) \cdot s_i(\tau) d\tau} \quad \text{mit } F(0, t) = 0$$

und damit folgt aus (23) für ein bestimmtes Beobachtungsjahr  $\bar{t}$

$$\ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot e^{-\int_0^{\tau} \tilde{\mu}(\sigma) \cdot s_i(\sigma) d\sigma} d\tau. \quad (25)$$

Entsprechend folgt mit (7) aus (24)

$$I(f, x_0) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} d\tau. \quad (26)$$

Mit (17) ist

$$\tilde{\mu}(x) \cdot \sum_{i=1}^n r_i(x) \cdot s_i(x) = \mu(x),$$

und damit

$$\tilde{\mu}(x) \cdot s_i(x) = \mu(x) + \tilde{\mu}(x) \cdot \left( s_i(x) - \sum_{i=1}^n r_i(x) \cdot s_i(x) \right).$$

Aufgrund von (25) und (18) ergibt sich

$$\ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma + \int_0^{\tau} \tilde{\mu}(\sigma) \cdot \sum_{i=1}^n r_i(\sigma) \cdot (s_i(\sigma) - s_i(\sigma)) d\sigma} d\tau,$$

$$\text{woraus folgt } \ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} \cdot u(\tau, \bar{t}) d\tau,$$

$$\text{genauer wegen (2) } \ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) + \varphi(\sigma) d\sigma} \cdot u(\tau, \bar{t}) d\tau \quad (27)$$

$$\text{mit } u(\tau, \bar{t}) = e^{\int_0^{\tau} \tilde{\mu}(\sigma) \cdot \sum_{i=1}^n r_i(\sigma) \cdot (s_i(\sigma) - s_i(\sigma)) d\sigma} = \prod_{i=1}^n e^{\int_0^{\tau} \tilde{\mu}(\sigma) \cdot r_i(\sigma) \cdot (s_i(\sigma) - s_i(\sigma)) d\sigma}. \quad (28)$$

Der Vergleich von Formel (27) und Formel (26) zeigt, dass die Berechnung von  $I(f, x_0)$  und  $\ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t})$  zu einem gegebenen Beobachtungsjahr  $\bar{t}$  dieselbe ist, bis auf eine „Störungs-funktion“  $u(x, \bar{t})$  aus (28). Alle Parameterfunktionen der Segmentierung kommen nur in  $u(x, \bar{t})$  vor.

Die Idee des Approximationsalgorithmus ist nun,  $u(x, \bar{t})$  und  $e^{-\int_0^{\bar{t}} \mu(\sigma) d\sigma}$  so zu approximieren, dass das Integral in (27) durch eine geschlossene Formel gelöst werden kann. Zudem soll bei Änderung von  $\bar{t}$  nicht noch einmal der gesamte Algorithmus durchlaufen werden müssen, das heißt bei Änderung des Beobachtungsjahres sollen nur die Parameter bezüglich  $u(x, \bar{t})$  ausgetauscht werden müssen. Die Laplace-Transformationen gewährleisten dies und damit eine vereinfachte Berechnung von (10).

### 3 DIE MODIFIZIERTE LAPLACE-TRANSFORMATION

Setzen wir eine konstante Verzinsung von  $i$  % voraus, also mit (2)  $\varphi(x) = \ln(1 + i/100)$ , so erhalten wir  $v(x) = e^{-x \cdot \ln(1+i/100)}$ . Wie die Formeln (25) und (26) zeigen, werden die Barwerte im Wesentlichen gebildet durch Integration eines Produktes der Form  $e^{-s \cdot x} \cdot L(x)$ , ( $s = \ln(1 + i/100)$ ), wobei  $L(x) \rightarrow 0$  mit  $x \rightarrow \infty$ . Dies resultiert aus der Tatsache, dass sowohl die Funktion  $\tilde{\mu}(\tau) \cdot s_i(\tau)$  als auch  $\mu(\sigma)$  positive Funktionen sind. Denken wir uns die Barwerte gebildet mit  $\omega \rightarrow \infty$ , das heißt bezüglich einer unbeschränkten Sterbetafel, so existiert das Integral  $\int_0^{\omega} e^{-s \cdot \tau} \cdot L(\tau) d\tau$  und hat einen endlichen reellen Wert. Dies ist aber gerade

die so genannte Laplace-Transformation der Funktion  $L(x)$ . Es liegt also nahe, zur Darstellung einer Lösung des Barwertproblems (durch Approximation der Störungsfunktion) Spezialformen der Laplace-Transformation zu betrachten. Wir geben deshalb hierzu eine kurze Einführung in die Laplace-Transformationen.

Sei  $C[x_0, \infty)$  mit  $\omega > x_0 \geq 0$  die Menge aller stückweise stetigen reellen Funktionen  $L: [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Gilt  $|e^{-\gamma \cdot \tau} \cdot L(\tau)| < M$ ,

für ein reelles  $M$  und ein reelles  $\gamma$  mit  $\tau \rightarrow \infty$ , so existiert für jedes  $s \in \mathbb{R}; s > 0$  die modifizierte Laplace-Transformation  $\Lambda: C[x_0, \infty) \rightarrow C(\mathbb{R})$

$$\Lambda(x_0, L(t)) = \int_{x_0}^{\infty} e^{-s \cdot \tau} \cdot L(\tau) d\tau = l(x_0, s). \quad (29)$$

Die Funktion  $L(t)$  heißt dann Originalfunktion und die Funktion  $l(x_0, s)$  die Bildfunktion oder Laplace-Transformierte. Für  $x_0 = 0$  liegt die klassische Laplace-Transformation vor (vgl. [5]). Eine der wichtigsten Aussagen über die (modifizierten) Laplace-Transformationen ist die Linearität. Für zwei Funktionen  $L_{1,2}: [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  ist

$$\Lambda(x_0, a \cdot L_1(\tau) + b \cdot L_2(\tau)) = a \cdot \Lambda(x_0, L_1(\tau)) + b \cdot \Lambda(x_0, L_2(\tau)). \quad (30)$$

Sie ist eine Folgerung aus der Linearität des Integrals.

Für weitere Untersuchungen setzen wir konstante Zinsintensität voraus, wie es in der Praxis im Allgemeinen der Fall ist, das heißt  $\varphi(x)$  ist unabhängig von  $x$  konstant. Aus (2) erhalten wir damit  $v(x) = e^{-x \cdot \ln(1+i/100)}$ , wobei  $i$  der konstante Zinssatz ist.

Setzen wir  $s = \ln(1 + i/100)$  in (27) so folgt

$$\ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} e^{-s \cdot \tau} \cdot e^{-\int_0^{\bar{t}} \mu(\sigma) d\sigma} \cdot u(\tau, \bar{t}) d\tau,$$

und hieraus  $\ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) =$

$$\frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot \left( \int_{x_0}^{\infty} e^{-s \cdot \tau} \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} \cdot u(\tau, \bar{t}) d\tau - \int_{\omega}^{\infty} e^{-s \cdot \tau} \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} \cdot u(\tau, \bar{t}) d\tau \right). \quad (31)$$

Wir setzen nun im Hinblick auf (29)  $L(\tau, \bar{t}) = g(\tau) \cdot u(\tau, \bar{t})$ ,  $g(\tau) = e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma}$  (32)

dann ist 
$$\ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot (\Lambda(x_0, L(\tau, \bar{t})) - \Lambda(\omega, L(\tau, \bar{t}))) \quad (33)$$

oder 
$$\ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot (l(x_0, s) - l(\omega, s)).$$

Insbesondere ist für  $u(\tau, \bar{t}) = 1$  mit (26)

$$I(f, x_0) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0))} \cdot (\Lambda(x_0, g(\tau)) - \Lambda(\omega, g(\tau))). \quad (34)$$

Die Bildfunktionen der modifizierten Laplace-Transformation lassen sich für viele Originalfunktionen explizit berechnen. Sie liegen tabelliert schon vor. Wir geben eine Auswahl für die hier vorliegenden Anwendungen an (weitere Beispiele siehe [5]):

Tabelle 2; Laplace-Transformationen

	L(t)	l(0,s)	l(x <sub>0</sub> ,s)	für
1.	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{e^{-s \cdot x_0}}{s}$	
2.	$e^{\pm a \cdot t}$	$\frac{1}{s \mp a}$	$\frac{e^{-(s \mp a) \cdot x_0}}{s \mp a}$	s > a

### 3.1 Beispiel

Zur Motivation der Vorgehensweise lösen wir beispielhaft das Integral des Rentenbarwerts aus (26). Dazu setzen wir eine Verzinsung von 5 % voraus, also  $\varphi(x) = \ln(1,05)$ . Aus (2) erhalten wir damit  $v(x) = e^{-x \cdot \ln(1,05)}$ . Zusätzlich setzen wir  $x_0 = 0$ ,  $\omega = 5$  und  $\mu(\tau) = 0,2$ .

Eingesetzt in (27) ergibt

$$I(f, x_0) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) + \varphi(\sigma) d\sigma} d\tau \quad \text{oder} \quad I(f, 0) = \int_0^{\omega} e^{-\tau \cdot (\ln(1,05) + 0,2)} d\tau.$$

Wegen (34) und  $v(0) = 1$ ,  $F(0) = 0$ ,  $u(\tau, \bar{t}) = 1$  ist

$$I(f, 0) = \Lambda(0, g(\tau)) - \Lambda(\omega, g(\tau)) = l(0, s) - l(\omega, s),$$

mit  $s = \ln(1,05) + 0,2$ . Mit 1. aus der Tabelle heißt das

$$I(f, 0) = \frac{1}{\ln(1,05) + 0,2} - \frac{e^{-(\ln(1,05) + 0,2) \cdot \omega}}{\ln(1,05) + 0,2} = 4,019451... - 1,158579... = 2,86087... \blacktriangleleft$$

Wir wenden uns wieder dem allgemeinen Fall zu und vereinfachen die Berechnung des Barwertes (27) dadurch, dass wir die Funktion  $u(\tau, \bar{t})$  approximieren für jedes  $\bar{t}$  durch eine geeignete Funktionenmenge der Form

$$\tilde{u}(\tau, \bar{t}) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k(\bar{t}) \cdot \alpha_k(\tau); a_k(\bar{t}) \in \mathbb{R}; \alpha_k(\tau) \in C[0, \infty).$$

Ist nun 
$$u(\tau, \bar{t}) \approx \tilde{u}(\tau, \bar{t}), \quad (35)$$

und entsprechend 
$$e^{-\int_0^{\bar{t}} \mu(\sigma) d\sigma} = g(\tau) \approx \tilde{g}(\tau) = \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot \beta_m(\tau); b_m \in \mathbb{R}; \beta_m(\tau) \in C[0, \infty),$$

so setzen wir mit (33)  $\ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) \approx \bar{\ddot{a}}(x_0, v, F, \bar{t}) =$

$$= \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot (\Lambda(x_0, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t})) - \Lambda(\omega, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}))). \quad (36)$$

Wegen (29) 
$$\frac{\Lambda(x_0, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}))}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\infty} e^{-s \cdot \tau} \cdot \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}) d\tau \quad (37)$$

folgt mit 
$$\tilde{u}(\tau, \bar{t}) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k(\bar{t}) \cdot e^{-k \cdot \tau}; a_k(\bar{t}) \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\Lambda(x_0, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}))}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot \sum_{k=0}^{\lambda} a_k(\bar{t}) \cdot \int_{x_0}^{\infty} e^{-s \cdot \tau} \cdot \tilde{g}(\tau) \cdot e^{-k \cdot \tau} d\tau. \quad (38)$$

Approximieren wir ebenfalls

$$e^{-\int_0^{\bar{t}} \mu(\sigma) d\sigma} \approx \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot e^{-m \cdot \tau}; b_m \in \mathbb{R}, \quad (39)$$

so ergibt dies 
$$\frac{\Lambda(x_0, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}))}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} =$$

$$\frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot \sum_{k=0}^{\lambda} a_k(\bar{t}) \cdot \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot \int_{x_0}^{\infty} e^{-s \cdot \tau} \cdot e^{-m \cdot \tau} \cdot e^{-k \cdot \tau} d\tau. \quad (40)$$

Mit 2. der Tabelle der Laplace-Transformationen ist dann

$$\frac{\Lambda(x_0, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}))}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot \sum_{k=0}^{\lambda} a_k(\bar{t}) \cdot \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot \frac{e^{-(s+k+m) \cdot x_0}}{s+k+m}. \quad (41)$$

Eingesetzt in (36) ergibt

$$\ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) \approx \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F(x_0, \bar{t}))} \cdot \left( \sum_{k=0}^{\lambda} a_k(\bar{t}) \cdot \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot \frac{e^{-(s+k+m) \cdot x_0} - e^{-(s+k+m) \cdot \omega}}{s+k+m} \right). \quad (42)$$

Bei der „klassischen Bewertungsmethode“ eines Bestandes an laufenden Rentenversicherungen, etwa mit Kommutationswerten „N(x)“, sind bei Vorliegen von n verschiedenen Beobachtungsjahren je Geschlecht  $n \cdot \omega$  Werte zu speichern. In Formel (42) werden je Geschlecht die  $a_k(\bar{t})$  - also  $\lambda$  Werte - und die  $b_m$  - also  $\kappa$  Werte - benötigt. Da  $\lambda$  und  $\kappa$  klein im Vergleich zu  $\omega$  sind, ist wesentlich weniger Speicherplatz notwendig. Wichtiger Vorteil hierbei ist die Tatsache, dass Formel (39) unabhängig von der Segmentierung, also  $u(x, \bar{t})$  ist. Zudem sei darauf hingewiesen, dass bei Anwendung von (42) keine Interpolationen zur Berechnung unterjähriger Werte notwendig sind.

Entscheidend für die Qualität von Formel (42) ist deren Approximationsgüte. Um hierüber Aussagen machen zu können, benötigen wir das folgende Lemma.

### 3.2 Lemma

Für ein Beobachtungsjahr  $\bar{t}$  sei  $\tilde{u}(\tau, \bar{t})$  eine Approximation an  $u(\tau, \bar{t})$ ,  $\tilde{g}(\tau)$  eine Approximation an  $g(\tau)$ ,  $\tilde{v}(\tau)$  eine beschränkte, stetige Funktion auf  $[x_0, \omega]$  und es gelte für ein reelles  $\varepsilon > 0$   $|\tilde{u}(\tau, \bar{t}) - u(\tau, \bar{t})| < \varepsilon$  und  $|\tilde{g}(\tau) - g(\tau)| < \varepsilon$ .

Es sei  $M = \text{Max}(\tilde{u}(\tau, \bar{t}), u(\tau, \bar{t}), \tilde{g}(\tau), g(\tau); \tau \in [x_0, \omega])$ . Ferner gelte  $F(x_0, \bar{t}) = 0$ . Dann gilt

$$\left| \int_{x_0}^{\omega} e^{-s\tau} \cdot g(\tau) \cdot u(\tau, \bar{t}) \cdot \tilde{s}(\tau) d\tau - (\Lambda(x_0, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}) \cdot \tilde{s}(\tau)) - \Lambda(\omega, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}) \cdot \tilde{s}(\tau))) \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon \cdot M \cdot 2}{s} \cdot \text{Max}_{\tau \in [x_0, \omega]}(\tilde{s}(\tau)).$$

Beweis:

$$\left| \int_{x_0}^{\omega} e^{-s\tau} \cdot g(\tau) \cdot u(\tau, \bar{t}) \cdot \tilde{s}(\tau) d\tau - (\Lambda(x_0, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}) \cdot \tilde{s}(\tau)) - \Lambda(\omega, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}) \cdot \tilde{s}(\tau))) \right| =$$

$$\left| \int_{x_0}^{\omega} e^{-s\tau} \cdot (g(\tau) \cdot u(\tau, \bar{t}) - \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t})) \cdot \tilde{s}(\tau) d\tau \right| \leq \int_{x_0}^{\omega} e^{-s\tau} \cdot |g(\tau) \cdot u(\tau, \bar{t}) - \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t})| \cdot |\tilde{s}(\tau)| d\tau.$$

Wegen der Beschränktheit von  $\tilde{u}(\tau, \bar{t})$ ,  $u(\tau, \bar{t})$ ,  $\tilde{g}(\tau)$  und  $g(\tau)$  in  $[x_0, \omega]$  existiert  $M > 0$ . Es

ist  $|g(\tau) \cdot u(\tau, \bar{t}) - \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t})| \leq \varepsilon \cdot |g(\tau) + \tilde{u}(\tau, \bar{t})| \leq \varepsilon \cdot M \cdot 2$

und  $|g(\tau) \cdot u(\tau, \bar{t}) - \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t})| \leq \varepsilon \cdot |\tilde{g}(\tau) + u(\tau, \bar{t})| \leq \varepsilon \cdot M \cdot 2.$

Damit ergibt sich  $\int_{x_0}^{\omega} e^{-s\tau} \cdot |g(\tau) \cdot u(\tau, \bar{t}) - \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t})| \cdot |\tilde{s}(\tau)| d\tau \leq$

$$\leq \varepsilon \cdot 2 \cdot \text{Max}_{\tau \in [x_0, \omega]}(\tilde{s}(\tau)) \cdot \int_{x_0}^{\omega} e^{-s\tau} \cdot \frac{|g(\tau) + \tilde{u}(\tau, \bar{t})| + |\tilde{g}(\tau) + u(\tau, \bar{t})|}{2} d\tau$$

$$\leq \frac{\varepsilon \cdot 2}{s} \cdot M \cdot \text{Max}_{\tau \in [x_0, \omega]}(\tilde{s}(\tau)) \text{ die Behauptung. } \blacktriangleleft$$

Corollar 3.3 gibt einen Überblick über die Approximationsgüte unter Verwendung von Lemma 3.2.

### 3.3 Corollar

Mit den Voraussetzungen von Lemma 3.2 sei  $\tilde{s}(\tau) = 1$ . Dann gilt

$$\left| \ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) - \bar{\ddot{a}}(x_0, v, F, \bar{t}) \right| \leq \frac{\varepsilon \cdot M \cdot 2}{s \cdot v(x_0)}.$$

Beweis:

Wir setzen  $e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} = g(\tau)$ , dann ist mit Formel (31)

$$\ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0)} \cdot \left( \int_{x_0}^{\infty} e^{-s\tau} \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} \cdot u(\tau, \bar{t}) d\tau - \int_{\omega}^{\infty} e^{-s\tau} \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} \cdot u(\tau, \bar{t}) d\tau \right)$$

$$= \frac{1}{v(x_0)} \cdot \left( \int_{x_0}^{\infty} e^{-s\tau} \cdot g(\tau) \cdot u(\tau, \bar{t}) d\tau - \int_{\omega}^{\infty} e^{-s\tau} \cdot g(\tau) \cdot u(\tau, \bar{t}) d\tau \right).$$

Mit Formel (36) gilt

$$\bar{\ddot{a}}(x_0, v, F, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0)} \cdot (\Lambda(x_0, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t})) - \Lambda(\omega, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}))) =$$

$$= \frac{1}{v(x_0)} \cdot \left( \int_{x_0}^{\infty} e^{-s\tau} \cdot \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}) d\tau - \int_{\omega}^{\infty} e^{-s\tau} \cdot \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}) d\tau \right).$$

Es folgt 
$$\left| \ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) - \bar{\ddot{a}}(x_0, v, F, \bar{t}) \right| = \frac{1}{v(x_0)} \cdot \left| \int_{x_0}^{\omega} e^{-s\tau} \cdot (g(\tau) \cdot u(\tau, \bar{t}) - \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t})) d\tau \right|.$$

Wegen Lemma 3.2 folgt  $\left| \ddot{a}(x_0, v, F, \bar{t}) - \bar{\ddot{a}}(x_0, v, F, \bar{t}) \right| \leq \frac{1}{v(x_0)} \cdot \frac{\varepsilon \cdot 2}{s} \cdot M$ , die Behauptung. ◀

Das bedeutet, dass bis auf einen Faktor die Approximation der Rentenbarwerte im Wesentli-

chen so gut ist wie die Approximationen von  $u(\tau, \bar{t})$  und  $e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma}$ . Es sei auch darauf hingewiesen, dass es nicht darauf ankommt wie gut oder schlecht eine Approximation der Funktionswerte für  $\tau > \omega$  ausfällt. Notwendig ist lediglich, dass die Laplace-Transformationen aus (33) und (34) existieren. Dies ist begründet in der Saldobildung in Formel (33) bzw. (34). Die „Hilfe“ von (24) zur Berechnung von (23) besteht also darin, dass wir zur Berechnung von (23) einmal die  $b_m$  aus (39) bestimmen, die immer wieder in die Approximation von (23) eingesetzt werden können – unabhängig vom Beobachtungsjahr. Die Laplace-Transformationen gewährleisten dann die explizite analytische Lösbarkeit der Integrale bei der Barwertbildung in geschlossene Formeln. Damit reduziert sich die Barwertbildung bei der Bewertung von Rentnerbeständen auf die Summation nur weniger Salden, deren Parameter bei Wechsel des Beobachtungsjahres teilweise weiter verwendet werden können.

Wir geben ein Rechenbeispiel für eine Bestandsbewertung mit einer Gesamtdarstellung des Algorithmus.

#### 4 DIE BEWERTUNG VON RENTENZAHLUNGEN

Vorgelegt sei ein Bestand an Rentenversicherungen im Rentenbezug. Diesen beobachten wir über die Jahre 1994 bis 2003 und berechnen aus den in den einzelnen Jahren ermittelten rohen Sterblichkeitshäufigkeiten die Sterblichkeiten 2. Ordnung, unabhängig von der Sterblichkeitsverbesserung der Alter 50 bis 100. Dabei seien die einzelnen Beobachtungsjahre wie folgt mit  $r_t(x)$ ;  $x = 50, \dots, 100$  und  $t = 1994, \dots, 2003$  gewichtet.

Tabelle 3; Gewichte  $r_t(x)$

x	Beobachtungsjahr									
	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
50	0,0996	0,0996	0,0997	0,0997	0,0997	0,0998	0,0999	0,1001	0,1004	0,1014
51	0,0988	0,0989	0,0990	0,0991	0,0992	0,0994	0,0997	0,1002	0,1013	0,1043
52	0,0984	0,0985	0,0986	0,0988	0,0990	0,0992	0,0996	0,1003	0,1017	0,1058
53	0,0980	0,0981	0,0983	0,0984	0,0987	0,0990	0,0996	0,1004	0,1021	0,1073
54	0,0976	0,0977	0,0979	0,0981	0,0984	0,0988	0,0995	0,1005	0,1026	0,1089
55	0,0971	0,0973	0,0975	0,0978	0,0981	0,0986	0,0994	0,1006	0,1031	0,1105
56	0,0967	0,0969	0,0971	0,0974	0,0978	0,0984	0,0993	0,1007	0,1036	0,1122
57	0,0962	0,0964	0,0967	0,0970	0,0975	0,0982	0,0992	0,1008	0,1041	0,1140
58	0,0957	0,0959	0,0963	0,0967	0,0972	0,0979	0,0990	0,1009	0,1046	0,1158
59	0,0952	0,0955	0,0958	0,0963	0,0969	0,0977	0,0989	0,1010	0,1052	0,1176
60	0,0947	0,0950	0,0954	0,0959	0,0965	0,0974	0,0988	0,1011	0,1057	0,1195
61	0,0941	0,0945	0,0949	0,0954	0,0962	0,0972	0,0987	0,1012	0,1063	0,1215

Tabelle 3; Gewichte  $r_t(x)$  - fortgesetzt

62	0,0936	0,0939	0,0944	0,0950	0,0958	0,0969	0,0986	0,1013	0,1069	0,1235
63	0,0930	0,0934	0,0939	0,0946	0,0954	0,0966	0,0984	0,1015	0,1075	0,1257
64	0,0924	0,0928	0,0934	0,0941	0,0950	0,0963	0,0983	0,1016	0,1082	0,1278
65	0,0918	0,0923	0,0929	0,0936	0,0946	0,0960	0,0982	0,1017	0,1088	0,1301
66	0,0912	0,0917	0,0923	0,0931	0,0942	0,0957	0,0980	0,1019	0,1095	0,1324
67	0,0905	0,0910	0,0917	0,0926	0,0938	0,0954	0,0979	0,1020	0,1102	0,1349
68	0,0898	0,0904	0,0911	0,0921	0,0933	0,0951	0,0977	0,1021	0,1110	0,1374
69	0,0891	0,0897	0,0905	0,0915	0,0929	0,0947	0,0976	0,1023	0,1117	0,1400
70	0,0883	0,0890	0,0899	0,0909	0,0924	0,0944	0,0974	0,1024	0,1125	0,1427
71	0,0876	0,0883	0,0892	0,0903	0,0919	0,0940	0,0972	0,1026	0,1133	0,1455
72	0,0868	0,0875	0,0885	0,0897	0,0913	0,0936	0,0971	0,1028	0,1142	0,1485
73	0,0859	0,0868	0,0878	0,0891	0,0908	0,0932	0,0969	0,1029	0,1151	0,1515
74	0,0851	0,0859	0,0870	0,0884	0,0902	0,0928	0,0967	0,1031	0,1160	0,1547
75	0,0842	0,0851	0,0862	0,0877	0,0896	0,0924	0,0965	0,1033	0,1170	0,1580
76	0,0832	0,0842	0,0854	0,0869	0,0890	0,0919	0,0963	0,1035	0,1180	0,1615
77	0,0822	0,0833	0,0845	0,0862	0,0884	0,0914	0,0960	0,1037	0,1191	0,1651
78	0,0812	0,0823	0,0836	0,0854	0,0877	0,0909	0,0958	0,1039	0,1202	0,1689
79	0,0801	0,0813	0,0827	0,0845	0,0870	0,0904	0,0956	0,1042	0,1214	0,1729
80	0,0790	0,0802	0,0817	0,0836	0,0862	0,0899	0,0953	0,1044	0,1226	0,1771
81	0,0778	0,0791	0,0807	0,0827	0,0855	0,0893	0,0951	0,1047	0,1239	0,1814
82	0,0765	0,0779	0,0796	0,0817	0,0846	0,0887	0,0948	0,1049	0,1252	0,1860
83	0,0752	0,0766	0,0784	0,0807	0,0838	0,0881	0,0945	0,1052	0,1266	0,1908
84	0,0738	0,0753	0,0772	0,0796	0,0829	0,0874	0,0942	0,1055	0,1281	0,1959
85	0,0724	0,0740	0,0759	0,0785	0,0819	0,0867	0,0939	0,1058	0,1297	0,2013
86	0,0708	0,0725	0,0746	0,0773	0,0809	0,0859	0,0935	0,1061	0,1313	0,2070
87	0,0692	0,0710	0,0732	0,0760	0,0798	0,0852	0,0931	0,1065	0,1331	0,2129
88	0,0675	0,0693	0,0717	0,0747	0,0787	0,0843	0,0928	0,1068	0,1349	0,2193
89	0,0656	0,0676	0,0701	0,0733	0,0775	0,0834	0,0924	0,1072	0,1369	0,2260
90	0,0637	0,0658	0,0684	0,0717	0,0762	0,0825	0,0919	0,1076	0,1390	0,2332
91	0,0616	0,0638	0,0666	0,0701	0,0749	0,0815	0,0915	0,1081	0,1412	0,2408
92	0,0594	0,0617	0,0646	0,0684	0,0734	0,0804	0,0910	0,1085	0,1436	0,2490
93	0,0570	0,0595	0,0626	0,0665	0,0718	0,0793	0,0904	0,1090	0,1462	0,2577
94	0,0544	0,0571	0,0603	0,0646	0,0702	0,0781	0,0899	0,1096	0,1489	0,2671
95	0,0517	0,0545	0,0579	0,0624	0,0684	0,0767	0,0893	0,1101	0,1519	0,2771
96	0,0487	0,0517	0,0554	0,0601	0,0664	0,0753	0,0886	0,1107	0,1551	0,2880
97	0,0455	0,0487	0,0526	0,0576	0,0644	0,0738	0,0879	0,1114	0,1585	0,2997
98	0,0421	0,0454	0,0496	0,0549	0,0621	0,0721	0,0871	0,1121	0,1622	0,3124
99	0,0383	0,0418	0,0463	0,0520	0,0596	0,0703	0,0863	0,1129	0,1663	0,3263
100	0,0341	0,0379	0,0427	0,0488	0,0569	0,0683	0,0854	0,1138	0,1707	0,3414

Ziel ist es, den Aufwand durch zukünftige Rentenzahlungen des Bestandes nach Formel (10) zum Jahr 2004 zu bestimmen. Exempelhaft unterstellen wir 120 % des Basistafel 2. Ordnung Männer Aggregattafel aus [1] als durch die Bestandsauswertung ermittelte Sterblichkeit 2. Ordnung ohne Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung (rohe Häufigkeiten). Wir erhalten dadurch auszugleichende Häufigkeiten bei einem Startalter von 50 Jahren von

Tabelle 4; relative Häufigkeiten  $p_x$

x	$P_x$	x	$P_x$	x	$P_x$
50	0,995691	67	0,826118	84	0,299524
51	0,990935	68	0,807956	85	0,258498
52	0,985744	69	0,788510	86	0,219044
53	0,980060	70	0,767709	87	0,181976
54	0,973900	71	0,745424	88	0,148036
55	0,967151	72	0,721556	89	0,117795
56	0,959738	73	0,696027	90	0,091581
57	0,951699	74	0,668689	91	0,069493
58	0,942845	75	0,639500	92	0,051410
59	0,933154	76	0,608391	93	0,037036
60	0,922640	77	0,575331	94	0,025952
61	0,911366	78	0,540316	95	0,017668
62	0,899403	79	0,503364	96	0,011672
63	0,886696	80	0,464652	97	0,007473
64	0,873183	81	0,424455	98	0,004631
65	0,858699	82	0,383181	99	0,002794
66	0,843024	83	0,341332	100	0,000000

Diese gleichen wir mit der Methode der kleinsten Quadrate aus durch die Funktionenmenge

$$e^{-\int_0^x \mu(\sigma) d\sigma} \approx \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot e^{-m \cdot \tau}; b_m \in \mathbb{R}, \text{ mit } \kappa = 8 \text{ und } \tau = \frac{x-50}{50}.$$

Wir erhalten damit (gerundet auf 3 Nachkommastellen)

Tabelle 5; Parameter der Ausgleichsfunktion  $b_m$

m	$b_m$
0	-256,254
1	3493,494
2	-20252,100
3	65251,307
4	-128057,675
5	157199,935
6	-118185,089
7	49862,363
8	-9055,009

Wir unterstellen eine Sterblichkeitsverbesserung nach Beobachtungsjahren der Form (vgl. Formel (14))

$$s_t(x) = \frac{\mu(x, t)}{\mu(x, t_0)} = e^{-[H_2(x) + G(t) \cdot (H_1(x) - H_2(x))] \cdot (t - 1999)}$$

$$G(t) = \begin{cases} 1 & 1999 \leq t \leq 1999 + T_1 \\ 1 - \frac{(1 - 1999 - T_1) \cdot (t - 1999 - T_1 - 1)}{2 \cdot (T_2 - T_1) \cdot (t - 1999)} & 1999 + T_1 \leq t \leq 1999 + T_2 \\ \frac{T_1 + T_2 + 1}{2 \cdot (t - 1999)} & t \geq 1999 + T_2 \end{cases}$$

Wir setzen hierbei  $T_1 = 5; T_2 = 10; t_0 = 1999$  mit den Starttrend- und Zielrendfunktionen  $H_1(x), H_2(x)$  wie in [1]. Weiterhin berechnen wir hierfür mit Formel (17)  $\tilde{\mu}(x)$ . Unter Anwendung der Simpson-Regel bestimmen wir durch Formel (28) für  $\bar{t} = 2004$   $u(x, \bar{t})$  für  $x = 50, \dots, 100$ . Diese Werte gleichen wir ebenfalls mit der Methode der kleinsten Quadrate durch Funktionenmengen der Form  $u(\tau, \bar{t}) \approx \tilde{u}(\tau, \bar{t}) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k(\bar{t}) \cdot e^{-k \cdot \tau}; a_k \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda = 6$  und

$\tau = \frac{x - 50}{50}$  aus (vgl. Formel (35)). Es ergeben sich die Werte

Tabelle 6: Werte der Trendfunktion  $\tilde{u}(\tau, \bar{t})$

$\tau$	$\tilde{u}(\tau, \bar{t})$	$\tau$	$\tilde{u}(\tau, \bar{t})$	$\tau$	$\tilde{u}(\tau, \bar{t})$
50	1,068645	67	1,2254542	84	1,242745
51	1,082832	68	1,2303859	85	1,241965
52	1,094818	69	1,2346129	86	1,241248
53	1,105526	70	1,2381539	87	1,240613
54	1,115564	71	1,2410395	88	1,240072
55	1,125303	72	1,2433106	89	1,239631
56	1,134942	73	1,2450156	90	1,239292
57	1,144557	74	1,2462092	91	1,239052
58	1,154141	75	1,2469494	92	1,238902
59	1,163637	76	1,2472965	93	1,238831
60	1,172956	77	1,2473115	94	1,238822
61	1,181997	78	1,2470539	95	1,238856
62	1,190656	79	1,2465814	96	1,238910
63	1,198841	80	1,2459483	97	1,238961
64	1,206469	81	1,2452051	98	1,238980
65	1,213475	82	1,2443974	99	1,238939
66	1,219814	83	1,2435656	100	----

mit den Parametern

Tabelle 7; Parameter der Trendfunktion  $a_k$

k	$a_k$
0	6,812441
1	-58,702488
2	236,997175
3	-493,239205
4	561,226214
5	-332,382831
6	80,295377

Wir unterstellen einen konstanten Rechnungszins von 2,75 % über die gesamte Laufzeit für jedes Beobachtungsjahr. Die entsprechenden Laplace-Transformierten aus Formel (41) werden verwendet, um mit Formel (42)  $\ddot{a}(x, v, F, \bar{t})$  zu berechnen. Eingesetzt in Formel (10) ergeben diese den Barwert des Aufwandes für die Rentenzahlungen

Tabelle 8; Aufwand für Rentenzahlungen nach Alter  $\ddot{a}(x, v, F, \bar{t})$

x	$\ddot{a}(x, v, F, \bar{t})$	$\sum_t R_{x,t}$	(*)	x	$\ddot{a}(x, v, F, \bar{t})$	$\sum_t R_{x,t}$	(*)
50	19,63229	0,00	0,00000	75	8,03833	3,45	0,27718
51	18,73983	0,19	0,03570	76	7,59629	3,31	0,25146
52	18,22616	0,38	0,06943	77	7,16643	3,17	0,22735
53	17,83929	0,57	0,10194	78	6,74984	3,03	0,20482
54	17,46863	0,76	0,13309	79	6,34721	2,90	0,18385
55	17,07330	0,95	0,16260	80	5,95890	2,76	0,16438
56	16,64731	1,14	0,19026	81	5,58500	2,62	0,14637
57	16,19940	1,33	0,21599	82	5,22543	2,48	0,12974
58	15,74166	1,52	0,23987	83	4,87995	2,34	0,11443
59	15,28402	1,71	0,26201	84	4,54831	2,21	0,10038
60	14,83229	1,90	0,28252	85	4,23025	2,07	0,08752
61	14,38835	2,10	0,30147	86	3,92558	1,93	0,07580
62	13,95109	2,29	0,31888	87	3,63430	1,79	0,06517
63	13,51756	2,48	0,33472	88	3,35666	1,66	0,05556
64	13,08416	2,67	0,34891	89	3,09330	1,52	0,04693
65	12,64745	2,86	0,36136	90	2,84549	1,38	0,03925
66	12,20477	3,05	0,37196	91	2,61538	1,24	0,03247
67	11,75464	3,24	0,38063	92	2,40644	1,10	0,02655
68	11,29683	3,43	0,38732	93	2,22401	0,97	0,02147
69	10,83228	3,62	0,39203	94	2,07547	0,83	0,01718
70	10,36287	3,81	0,39478	95	1,96834	0,69	0,01358
71	9,89116	4,00	0,39565	96	1,89924	0,55	0,01048
72	9,42003	3,86	0,36381	97	1,81541	0,41	0,00751
73	8,95240	3,72	0,33340	98	1,55036	0,28	0,00428
74	8,49103	3,59	0,30451	99	0,91365	0,14	0,00126

Legende: (\*) =  $\ddot{a}(x, v, F, \bar{t}) \cdot \sum_t R_{x,t}$

Den Barwert der Aufwendungen für Rentenzahlungen (BwA) nach Formel (10) erhalten wir durch Summenbildung über die Spalten (\*), im vorliegenden Falle für 1 EUR Gesamtbestandsrente also 8,988.

Bemerkenswert hierbei ist, dass lediglich die 16 Werte  $a_k$  und  $b_m$  gespeichert werden müssen, um bei Wechsel des Zinssatzes nochmals den letzten Berechnungsschritt als einzig notwendigen Schritt durchführen zu können. Die Laplace-Transformationen aus Formel (41) bleiben erhalten. Es wird lediglich der Parameter  $s$  bei der Berechnung von Formel (42) ausgetauscht. Es ergeben sich für die folgenden Zinssätze

Tabelle 9; Barwerte BwA zu verschiedenen Zinssätzen

Zinssatz	BwA
3,25 %	8,664
3,75 %	8,361
4,75 %	7,811
5,75 %	7,327

Zudem sind keine Interpolationen bei unterjährig Berechnungen notwendig und bei Änderung der Sterblichkeitsverbesserung – ebenso wie bei Änderung von  $\bar{t}$  - muss lediglich die Berechnung von  $\tilde{u}(x, \bar{t})$  nochmals durchgeführt werden, das heißt die Bestimmung der  $a_k$ .

Um den Fehler abzuschätzen betrachten wir Corollar 3.3. Durch Auswertung der Funktionen erhalten wir aus  $|\tilde{u}(\tau, \bar{t}) - u(\tau, \bar{t})| < \varepsilon$  und  $|\tilde{g}(\tau) - g(\tau)| < \varepsilon$  die Abschätzung  $\varepsilon < 2 \cdot 10^{-4}$  und  $M \leq 1,25$ . Wegen  $50 \leq x_0 \leq 100$  ist bei einem Rechnungszins von 2,75 %  $v(x_0) \geq 0,2575$ . Der maximale Fehler aus Corollar 3.3 lässt sich damit abschätzen zu

$$\frac{\varepsilon \cdot M \cdot 2}{s \cdot v(x_0)} \leq 0,0716.$$

Damit beträgt der Fehler weniger als  $\frac{0,0716}{8,988} \approx 0,8$  % des Barwerts der Aufwendungen.

## 5 DISJUNKTE SEGMENTIERUNG

Bisher sind wir je Geschlecht von einer einzigen, für den Gesamtbestand gleichen, Sterbetafel ausgegangen und haben aus dieser Barwerte abgeleitet. Oft besteht allerdings die Notwendigkeit, das zugrunde liegende Gesamtkollektiv zu segmentieren, etwa nach Raucher/Nichtraucher oder Arbeiter/Angestellte oder nach geografischen Gesichtspunkten, und getrennt die Barwerte zu bestimmen. Wir unterstellen hier die Unterteilung in zwei (disjunkte) Kollektive. In einem solchen Fall werden die notwendigen Rentenbarwerte getrennt gerechnet für die beiden Teilkollektive (gelegentlich noch zusätzlich für den Gesamtbestand). Der entsprechend Formel (10) sich ergebende Gesamtaufwand für das Kollektiv ergibt sich dann aus

$$\text{Aufwand für zukünftige Rentenzahlungen} = \sum_{x=0}^{\omega} \sum_t \left( R_{x,t}^{(1)} \cdot \ddot{a}(x, v, F^{(1)}, t) + R_{x,t}^{(2)} \cdot \ddot{a}(x, v, F^{(2)}, t) \right),$$

wobei  $R_{x,t}^{(i)}$  der Anteil der Rentenzahlungen für  $x$ -jährigen Rentner mit Beobachtungsjahr  $t$  am Teilkollektiv  $i = 1, 2$  ist und  $\ddot{a}(x, v, F^{(i)}, t)$  der (11) entsprechende Barwert.

Analog zu Abschnitt 1 formulieren wir die Segmentierung. Die Funktion  $\mu(x)$  für den Gesamtbestand  $K$  beschreibt wieder die Sterblichkeitsintensität und  $\mu^{(1)}(x)$ ,  $\mu^{(2)}(x)$  die Sterblichkeitsintensitäten der disjunkten Teile, jeweils für die gesamten Teilkollektive ( $K_1$  der

selektierte Teil und  $K_2$  der Rest;  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$  und  $K_1 \cup K_2 = K$ .  $r^{(1)}(x), r^{(2)}(x)$  sind die jeweiligen Anteile an  $K$ . Es ist damit

$$\mu(x) = r^{(1)}(x) \cdot \mu^{(1)}(x) + r^{(2)}(x) \cdot \mu^{(2)}(x). \quad (43)$$

Die Lösung der Differentialgleichung

$$\mu^{(i)}(x) \cdot (1 - F^{(i)}(x)) = F^{(i)'}(x), \quad i = 1, 2$$

sind die korrespondierenden Funktionen zu  $F(x)$  in (6). Weiterhin unterstellen wir identisches  $v(x)$  für alle Teile des Kollektivs. Wegen  $\hat{\mu}(x) = \mu^{(1)}(x) - \mu^{(2)}(x)$  und  $r^{(1)}(x) + r^{(2)}(x) = 1$ , erhalten wir

$$\mu(x) - r^{(1)}(x) \cdot \hat{\mu}(x) = \mu^{(2)}(x) \quad \text{oder} \quad \mu(x) \cdot \left(1 - r^{(1)}(x) \cdot \frac{\hat{\mu}(x)}{\mu(x)}\right) = \mu^{(2)}(x) \quad (44)$$

und  $\mu(x) + r^{(2)}(x) \cdot \hat{\mu}(x) = \mu^{(1)}(x)$  oder  $\mu(x) \cdot \left(1 + r^{(2)}(x) \cdot \frac{\hat{\mu}(x)}{\mu(x)}\right) = \mu^{(1)}(x)$ .

Wir betrachten nun wieder das Kollektiv über  $n$  Jahre und leiten daraus die relativen Sterblichkeitshäufigkeiten je Beobachtungsjahr analog zur Vorgehensweise aus Abschnitt 2 ab. Wir erhalten ein zusätzlich segmentiertes Kollektiv nach Beobachtungsjahren bzw. Beobachtungsjahresgruppen  $t$  analog zu (12) mit

$$\mu^{(i)}(x) = \sum_{t=1}^n \mu^{(i)}(x, t) \cdot r_t^{(i)}(x); \quad i = 1, 2, \quad (45)$$

wobei  $\mu^{(i)}(x, t)$  die Sterblichkeitsintensität im Alter  $x$  des Beobachtungsjahrgangs  $t$  im Teilkollektiv  $i$  ist und  $r_t^{(i)}(x)$  der Anteil am Teilkollektiv  $i$  des Alters  $x$  mit Beobachtungsjahr  $t$  bedeutet. Es ist  $\sum_{k=1}^n r_k^{(i)} = 1$  für alle  $i$ . Entsprechend zu (14) ist

$$\mu^{(i)}(x, t_0^{(i)}) \cdot s_t^{(i)}(x) = \mu^{(i)}(x, t) \quad \text{für alle } t, x \text{ und } i = 1, 2, \quad (46)$$

$t_0^{(i)}$  die Basistafel des Teilbestandes  $i$  und  $s_t^{(i)}(x)$  die Verhältnisse der Sterblichkeitsintensitäten im Alter  $x$  mit Beobachtungsjahrgang  $t$  zur Sterblichkeitsintensität zum Beobachtungsjahrgang der Basistafel des Teilkollektivs  $i$ . Offensichtlich ist  $0 \leq s_t^{(i)}(x)$  und  $s_{t_0^{(i)}}^{(i)}(x) = 1$ . Ist die Basisverteilungsfunktion vorgegeben, so ist analog zu (6) für alle  $t$

$$\mu^{(i)}(x, t) \cdot (1 - F^{(i)}(x, t)) = F^{(i)'}(x, t) \quad (47)$$

oder unter Anwendung von (46)

$$\mu^{(i)}(x, t_0^{(i)}) \cdot s_t^{(i)}(x) \cdot (1 - F^{(i)}(x, t)) = F^{(i)'}(x, t). \quad (48)$$

Ebenso ergibt sich entsprechend zu (17)

$$\tilde{\mu}^{(i)}(x) = \frac{\mu^{(i)}(x)}{\sum_{t=1}^n r_t^{(i)}(x) \cdot s_t^{(i)}(x)}. \quad (49)$$

Hier unterstellen wir, dass jedes Teilkollektiv in  $n$  Beobachtungsjahre unterteilt wird und die Voraussetzungen von (18) in jedem Teilkollektiv erfüllt werden. Damit existiert die Funktion  $\tilde{\mu}^{(i)}(x)$  für alle  $i$ . Unter Anwendung von Satz 2.1 ist die Verteilungsfunktion  $F^{(i)}(x, t)$  zum Beobachtungsjahrgang  $t = 1, \dots, n$  im Teilkollektiv  $i$  gegeben durch

$$F^{(i)}(x, t) = 1 - \left(1 - F^{(i)}(x_0, t)\right) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \tilde{\mu}^{(i)}(\tau) \cdot s_t^{(i)}(\tau) d\tau} \quad (50)$$

mit gegebenem Anfangswert  $F^{(i)}(x_0, t)$ .

Zentrales Thema dieses Abschnitts ist nun die Frage, wie zu gegebenem Beobachtungsjahr  $t$  für Teilbestand  $i$  der Rentenbarwert zur Rente 1

$$\ddot{a}(x_0, v, F^{(i)}, t) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, t))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot f_t^{(i)}(\tau) d\tau ; \quad (51)$$

mit  $f_t^{(i)}(\tau) = 1 - F^{(i)}(\tau, t) = (1 - F^{(i)}(x_0, t)) \cdot e^{-\int_{x_0}^{\tau} \tilde{\mu}^{(i)}(\sigma) \cdot s_t^{(i)}(\sigma) d\sigma}$  möglichst einfach berechnet werden kann. Sei  $\bar{t}$  das Beobachtungsjahr zu dem gerechnet werden soll, dann ist wegen (49)

$$\tilde{\mu}^{(i)}(x) \cdot \sum_{t=1}^n r_t^{(i)}(x) \cdot s_t^{(i)}(x) = \mu^{(i)}(x),$$

und damit  $\tilde{\mu}^{(i)}(x) \cdot s_{\bar{t}}^{(i)}(x) = \mu^{(i)}(x) + \tilde{\mu}^{(i)}(x) \cdot \left( s_{\bar{t}}^{(i)}(x) - \sum_{t=1}^n r_t^{(i)}(x) \cdot s_t^{(i)}(x) \right)$ .

Aufgrund von (51) ergibt sich

$$\ddot{a}(x_0, v, F^{(i)}, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu^{(i)}(\sigma) d\sigma + \int_0^{\tau} \tilde{\mu}^{(i)}(\sigma) \cdot \sum_{t=1}^n r_t^{(i)}(\sigma) \cdot (s_t^{(i)}(\sigma) - s_{\bar{t}}^{(i)}(\sigma)) d\sigma} d\tau,$$

$$\text{woraus } \ddot{a}(x_0, v, F^{(i)}, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu^{(i)}(\sigma) d\sigma} \cdot u^{(i)}(\tau, \bar{t}) d\tau \quad (52)$$

$$\text{folgt, mit } u^{(i)}(\tau, \bar{t}) = e^{\int_0^{\tau} \tilde{\mu}^{(i)}(\sigma) \cdot \sum_{t=1}^n r_t^{(i)}(\sigma) \cdot (s_t^{(i)}(\sigma) - s_{\bar{t}}^{(i)}(\sigma)) d\sigma}. \quad (53)$$

Unter Verwendung von (44) erhalten wir für  $i = 2$

$$e^{-\int_0^{\tau} \mu^{(2)}(\sigma) d\sigma} = e^{x_0} \cdot \int_0^{\tau} \hat{\mu}(\sigma) \cdot r^{(1)}(\sigma) d\sigma \cdot e^{-x_0}.$$

Deshalb schreiben wir (52) als

$$\ddot{a}(x_0, v, F^{(2)}, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(2)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} \cdot \tilde{s}^{(2)}(\tau) \cdot u^{(2)}(\tau, \bar{t}) d\tau \quad (55)$$

$$\text{mit } \tilde{s}^{(2)}(\tau) = e^{\int_0^{\tau} \hat{\mu}(\sigma) \cdot r^{(1)}(\sigma) d\sigma}.$$

Entsprechend den Formeln (32) und (33) setzen wir  $L^{(2)}(\tau, \bar{t}) = g(\tau) \cdot \tilde{s}^{(2)}(\tau) \cdot u^{(2)}(\tau, \bar{t})$ ,

$$\text{dann ist } \ddot{a}(x_0, v, F^{(2)}, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(2)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \left( \Lambda(x_0, L^{(2)}(\tau, \bar{t})) - \Lambda(\omega, L^{(2)}(\tau, \bar{t})) \right).$$

Entsprechend erhalten wir für  $i = 1$

$$\ddot{a}(x_0, v, F^{(1)}, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(1)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} \cdot \tilde{s}^{(1)}(\tau) \cdot u^{(1)}(\tau, \bar{t}) d\tau \quad (56)$$

$$\text{und mit } \tilde{s}^{(1)}(\tau) = e^{-\int_0^{\tau} \hat{\mu}(\sigma) \cdot r^{(2)}(\sigma) d\sigma}; \quad L^{(1)}(\tau, \bar{t}) = g(\tau) \cdot \tilde{s}^{(1)}(\tau) \cdot u^{(1)}(\tau, \bar{t})$$

$$\text{folgt } \ddot{a}(x_0, v, F^{(1)}, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(1)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \left( \Lambda(x_0, L^{(1)}(\tau, \bar{t})) - \Lambda(\omega, L^{(1)}(\tau, \bar{t})) \right).$$

Die Beziehungen legen - analog zu Abschnitt 3 - die Anwendung der Laplace-Transformation nahe. Die Formeln (55) und (56) zeigen aber, dass durch die Einführung

einer zusätzlichen Segmentierung in zwei Teilkollektive bei der Barwertberechnung zur Bewertung des Bestandes, im Vergleich zur Berechnung ohne weitere Segmentierung nach Formel (27), eine zusätzliche “Störfunktion”  $\tilde{s}^{(i)}(\tau)$  unter das Integral in (27) hinzugekommen ist. Damit ist die Näherungsformel (42) nicht direkt anwendbar.

Das Ziel der nun folgenden Ausführungen ist, eine Funktion

$$g_0^{(i)}(\tau) = \sum_{j=0}^{\phi} c_j^{(i)} \cdot h_j(\tau); c_j^{(i)} \in \mathbb{R}; h_j \in C[0, \infty); i = 1, 2 \quad (57)$$

zu konstruieren mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \ddot{a}(x_0, v, F^{(i)}, \bar{t}) &\approx \bar{\ddot{a}}(x_0, v, F^{(2)}, \bar{t}) = \\ &= \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau) \right) \cdot \tilde{s}^{(i)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \sum_{j=0}^{\phi} \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot c_j^{(i)} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau) \cdot h_j(\tau) d\tau \quad (58) \end{aligned}$$

Das Bemerkenswerte an Formel (58) ist, dass die Gleichheit gilt, das heißt, es ist nicht notwendig  $\tilde{s}^{(i)}(\tau)$  explizit auszuwerten, um eine exakte Lösung von Formel (58) zu erhalten. Damit ist erst eine Näherung erforderlich, wenn analog zum unsegmentierten Fall entsprechend Formel (42) angewendet werden muss. Mit anderen Worten, eine zusätzliche Segmentierung erfordert keine zusätzliche Näherung – die Genauigkeit ist der der Lösung von (42) vergleichbar. Wir stellen zunächst einige grundlegende Aussagen zur Vorgehensweise zusammen.

Sei  $C[a, b]$  der lineare Raum aller auf dem Intervall  $[a, b]$  ( $a > b$ ) mindestens einmal stetig differenzierbaren Funktionen gegeben. Mit einer strikt positiven, stetig differenzierbaren Funktion  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; v(t) > 0$ , wird die reelle Funktion  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  definiert durch

$$\langle f, g \rangle : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \langle f, g \rangle = \int_a^b v(t) \cdot f(t) \cdot g(t) dt \quad (59)$$

ein “inneres Produkt” auf  $C[a, b]$  genannt. Die reelle Funktion  $\|\bullet\| : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \text{ für alle } f \in C[a, b]$$

heißt die durch das innere Produkt induzierte “Norm” auf  $C[a, b]$ . Mit einer beliebigen stetigen Funktion  $f$  und einem endlichdimensionalen linearen Raum

$$G = \{g : g \rightarrow [a, b]; g \text{ stetig}\} \subset C[a, b]; \dim(G) = n < \infty,$$

heißt die Funktion  $g_0 \in G$  eine beste Approximation (BA) an  $f$  genau dann, wenn für alle

$$g \in G \quad \|f - g_0\| \leq \|f - g\| \text{ gilt.}$$

Der nächste Satz – den wir hier ohne Beweis darstellen - ist grundlegend für die Charakterisierung von BA und die Berechnung von Barwerten mit Approximationstheorie.

### 5.1 Satz

Sei der lineare Raum der stetigen Funktionen auf  $[a, b]$  und die stetige Funktion  $f$  auf  $[a, b]$  gegeben. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $g_0$  aus  $G$  ist BA an  $f$

$$(ii) \quad \text{für alle } g \text{ in } G \text{ gilt} \quad \int_a^b v(t) \cdot g(t) \cdot f(t) dt = \int_a^b v(t) \cdot g(t) \cdot g_0(t) dt . \quad (60)$$

Beweis siehe [3].

Um den Satz nutzen zu können, müssen wir wissen ob überhaupt eine BA existiert und wie diese berechnet wird. Der nachfolgende Satz zeigt die Eigenschaften.

### 5.2 Satz

Mit den Annahmen von Satz 5.1 sei  $\{h_0, \dots, h_\phi\}$  eine Basis des linearen Raumes  $G$ . Dann gelten die folgenden Aussage:

(i) Es existiert genau eine BA  $g_0 \in G$  für  $f$ .

(ii) Die Koeffizienten  $\alpha_j \in \mathbb{R} \quad j = 0, \dots, \phi$  mit  $g_0(t) = \sum_{j=0}^{\phi} \alpha_j \cdot h_j$  sind gegeben durch das

lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \langle h_0, h_0 \rangle & \cdots & \langle h_0, h_\phi \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle h_\phi, h_0 \rangle & \cdots & \langle h_\phi, h_\phi \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle h_0, f \rangle \\ \vdots \\ \langle h_\phi, f \rangle \end{pmatrix} \quad (61)$$

und (61) ist immer eindeutig lösbar.

Beweis siehe [3].

Wir haben nun über die Lösung des linearen Gleichungssystems (61) einen Algorithmus zur Berechnung von BA aus  $G$  für eine Funktion  $f$  aufgezeigt. Diesen wenden wir nun zur Berechnung von Formel (55) an.

In Abschnitt 3 hatten wir mit im Hinblick auf Formeln (35) die Funktionen durch die Methode der kleinsten Quadrate durch Funktionen der Form

$$e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} \approx \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot \alpha_m(\tau); b_m \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \quad ,$$

$$u^{(i)}(\tau, \bar{t}) \approx \tilde{u}^{(i)}(\tau, \bar{t}) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot \beta_k(\tau); a_k(\bar{t}) \in \mathbb{R}, \quad \alpha_k, \beta_m \in C[0, \infty) \text{ approximiert. Wir}$$

setzen  $G = \text{span}\{\alpha_m(\tau) \cdot \beta_k(\tau) : m = 0, \dots, \kappa; k = 0, \dots, \lambda\}$ .

Offenbar ist  $1 \leq \dim(G) \leq \kappa \cdot \lambda$ . Dann ist mit Formel (55) bzw. (56)

$$\begin{aligned} \ddot{a}(x_0, v, F^{(i)}, \bar{t}) &\approx \\ &\frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot \alpha_m(\tau) \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot \beta_k(\tau) \right) \cdot \tilde{s}^{(i)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau) \right) \cdot \tilde{s}^{(i)}(\tau) d\tau . \end{aligned}$$

Wir setzen  $\dim(G) - 1 = \phi$  und für  $i = 1, 2$

$$\bar{a}(x_0, \nu, F^{(i)}, \bar{t}) = \frac{1}{\nu(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \nu(\tau) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau) \right) \cdot \tilde{s}^{(i)}(\tau) d\tau.$$

Offensichtlich ist  $\tilde{s}^{(i)}(\tau)$  stetig auf  $[x_0, \omega]$  und damit existiert nach Satz 5.1 genau eine BA

der Form  $g_0^{(i)}(\tau) = \sum_{j=0}^{\phi} c_j^{(i)} \cdot h_j(\tau) \in G$  an  $\tilde{s}^{(i)}(\tau) = f(\tau, i)$ , deren Koeffizienten mit Satz 5.2

eindeutig bestimmt sind. Mit der Funktion  $g^{(i)}(\tau) = \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau) \in G$  folgt

$$\begin{aligned} \text{aus (60)} \quad & \frac{1}{\nu(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \nu(\tau) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau) \right) \cdot \tilde{s}^{(i)}(\tau) d\tau = \\ & = \frac{1}{\nu(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \nu(\tau) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau) \right) \cdot g_0^{(i)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Hiermit gilt dann für  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \bar{a}(x_0, \nu, F^{(i)}, \bar{t}) &= \frac{1}{\nu(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \nu(\tau) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau) \right) \cdot g_0^{(i)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\nu(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \nu(\tau) \cdot \sum_{j=0}^{\phi} \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot c_j^{(i)} \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau) \cdot h_j(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\nu(x_0) \cdot (1 - F^{(i)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \sum_{j=0}^{\phi} \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(i)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot c_j^{(i)} \cdot \int_{x_0}^{\omega} \nu(\tau) \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau) \cdot h_j(\tau) d\tau. \quad (62) \end{aligned}$$

Wählen wir  $\{h_0, \dots, h_{\phi}\}$  so, dass wieder die modifizierten Laplace-Transformationen anwendbar sind, kann (62) explizit gelöst werden. Es sei auch darauf hingewiesen, dass die Berech-

nung der Approximation von  $e^{-\int_0^{\bar{t}} \mu(\sigma) d\sigma}$  nur einmal notwendig ist – unabhängig davon, welche Segmentierung in Teilbestände vorliegt. Auch hier ist – wie im unsegmentierten Fall – die Güte der Anwendung von der Approximationsgenauigkeit – hier von Formel (62) – abhängig. Corollar 5.3 gibt einen Überblick über die Approximationsgüte unter Verwendung von Lemma 3.2.

### 5.3 Corollar

Mit den entsprechenden Bezeichnungen und Voraussetzungen von Lemma 3.2 sei  $\tilde{s}^{(i)}(\tau) = g_0^{(i)}(\tau)$  für  $i = 1, 2$ . Dann gilt

$$\left| \bar{a}(x_0, \nu, F^{(i)}, \bar{t}) - \bar{a}(x_0, \nu, F^{(i)}, \bar{t}) \right| \leq \frac{\varepsilon \cdot M \cdot 2}{s \cdot \nu(x_0)} \cdot \text{Max}_{\tau \in [x_0, \omega]}(\tilde{s}^{(i)}(\tau)).$$

Beweis:

Wir setzen  $e^{-\int_0^{\bar{t}} \mu(\sigma) d\sigma} = g(\tau)$ , dann ist mit den Formel (55) und (56), sowie  $F^{(i)}(x_0, \bar{t}) = 0$

$$\bar{a}(x_0, \nu, F^{(i)}, \bar{t}) = \frac{1}{\nu(x_0)} \cdot \left( \Lambda(x_0, L^{(i)}(\tau, \bar{t})) - \Lambda(\omega, L^{(i)}(\tau, \bar{t})) \right)$$

mit  $L^{(i)}(\tau, \bar{t}) = g(\tau) \cdot \tilde{s}^{(i)}(\tau) \cdot u^{(i)}(\tau, \bar{t})$ ;  $i = 1, 2$ .

Wir setzen  $\tilde{g}(\tau)$  und  $\tilde{u}^{(i)}(\tau, \bar{t})$  wie in Formel (35) als Approximationen an  $g(\tau)$ ,  $u^{(i)}(\tau, \bar{t})$ . Dann gilt  $\bar{a}(x_0, v, F^{(i)}, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0)} \cdot (\Lambda(x_0, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}) \cdot \tilde{s}^{(i)}(\tau)) - \Lambda(\omega, \tilde{g}(\tau) \cdot \tilde{u}(\tau, \bar{t}) \cdot \tilde{s}^{(i)}(\tau)))$ .

Verwenden wir Lemma 3.2 folgt

$$|\bar{a}(x_0, v, F^{(i)}, \bar{t}) - \bar{a}(x_0, v, F^{(i)}, \bar{t})| \leq \frac{1}{v(x_0)} \cdot \frac{\varepsilon \cdot 2}{s} \cdot M \cdot \text{Max}_{\tau \in [x_0, \omega]}(\tilde{s}^{(i)}(\tau)) \text{ die Behauptung. } \blacktriangleleft$$

Bemerkt sei noch, dass wegen Formel (60) anstelle von  $\text{Max}_{\tau \in [x_0, \omega]}(\tilde{s}^{(i)}(\tau))$  auch  $\text{Max}_{\tau \in [x_0, \omega]}(g_0^{(i)}(\tau))$ , also das Maximum der BA, gesetzt werden kann. Wir geben ein Beispiel für die Anwendung des Algorithmus.

## 6 BEWERTUNG BEI DISJUNKTER SEGMENTIERUNG

Wir bewerten die voraussichtlichen Rentenzahlungen eines Bestandes an Rentenversicherungen (männliche versicherte Personen) segmentiert nach „bei Antragstellung Raucher“ ( $K_1$ ) und „bei Antragstellung Nichtraucher“ ( $K_2$ ). Dem Beispiel aus Abschnitt 4 folgend (beachte  $100 \geq x \geq 50$ ), beobachten wir wieder einen Bestand über die Jahre 1994 bis 2003 und führen die Bewertung zum Jahr 2004 durch. Durch Bestandsauswertungen erhalten wir  $r^{(1)}(x) = 0,25$  und  $r^{(2)}(x) = 1 - r^{(1)}(x)$ . Mit [7] legen wir  $\mu^{(1)}(x) = \mu^{(2)}(x) \cdot 1,75$  fest. Mit Formel (43) ist

$$\hat{\mu}(x) \cdot r^{(1)}(x) = \mu(x) \cdot 0,15789\dots$$

$$\hat{\mu}(x) \cdot r^{(2)}(x) = \mu(x) \cdot 0,47368\dots$$

und es gilt

$$\mu^{(1)}(x) = \mu(x) \cdot 1,47368\dots$$

$$\mu^{(2)}(x) = \mu(x) \cdot 0,84211\dots$$

Ziel ist es, zunächst den Barwert aus Formel (55) für  $i = 2$ , also

$$\bar{a}(x_0, v, F^{(2)}, \bar{t}) = \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(2)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} \cdot \tilde{s}^{(2)}(\tau) \cdot u^{(2)}(\tau, \bar{t}) d\tau$$

näherungsweise zu bestimmen. Mit (62) haben wir zum Ziel, den Barwert zu berechnen

$$\bar{a}(x_0, v, F^{(2)}, \bar{t}) \approx \bar{a}(x_0, v, F^{(2)}, \bar{t}) =$$

$$= \frac{1}{v(x_0) \cdot (1 - F^{(2)}(x_0, \bar{t}))} \cdot \sum_{j=1}^{\phi} \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(2)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot c_j^{(2)} \cdot \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau) \cdot h_j(\tau) d\tau.$$

mit geeigneten Funktionen  $\alpha_m, \beta_k, h_j$ . Hierzu setzen wir wieder analog zu Abschnitt 4

$$e^{-\int_0^{\tau} \mu(\sigma) d\sigma} \approx \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot \alpha_m(\tau); b_m \in \mathbb{R}, u^{(2)}(\tau, \bar{t}) \approx \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(2)}(\bar{t}) \cdot \beta_k(\tau); a_k^{(2)}(\bar{t}) \in \mathbb{R}$$

und  $v(\tau) = e^{-\tau \cdot \ln(1,0275)}$  mit  $\alpha_m(\tau) = e^{-m \cdot \tau}$  mit  $\kappa = 8$ ,  $\beta_k(\tau) = e^{-k \cdot \tau}$  mit  $\lambda = 6$  und  $\tau = \frac{x - 50}{50}$ .

Dieselben Sterblichkeiten wie aus Abschnitt 4 für den Gesamtbestand unterstellt (120 % der Basistafel 2. Ordnung Männer Aggregattafel vgl. [1]), erhalten wir  $b_m$  durch die Methode der kleinsten Quadrate bei einem Startalter von 50 Jahren wie aus Tabelle 5. Aus Formel

$$(53) \text{ folgt } u^{(2)}(\tau, \bar{t}) = e^{\int_0^{\tau} \bar{\mu}^{(2)}(\sigma) \cdot \sum_{i=1}^n r_i^{(2)}(\sigma) (s_i^{(2)}(\sigma) - s_i^{(2)}(\sigma)) d\sigma}. \text{ Wir unterstellen auch im Teilkollektiv } K_2$$

die Gewichtung der Messwerte in den einzelnen Beobachtungsjahren  $r_t^{(2)}(\sigma)$  wie in Tabelle 3 und die Sterblichkeitsverbesserung  $s_t^{(2)}(\sigma)$  wie in Abschnitt 4. Die Werte für  $\tilde{u}^{(2)}(\tau, \bar{t})$  ergeben sich analog zu den Werten aus Tabelle 6 bzw. die Parameter  $a_k^{(2)}(\bar{t})$  analog zu den Werten der Tabelle 7, mit Hilfe der Simpson-Regel.

Weiterhin ist  $G = \text{span}\{h_j(\tau) = e^{-j\tau} : j = 0, \dots, \kappa + \lambda = 14\}$ . Mit Formel (61) ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \langle h_0, h_0 \rangle & \cdots & \langle h_0, h_{14} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle h_{14}, h_0 \rangle & \cdots & \langle h_{14}, h_{14} \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0^{(2)} \\ \vdots \\ c_{14}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle h_0, f \rangle \\ \vdots \\ \langle h_{14}, f \rangle \end{pmatrix}$$

mit  $f(\tau, 2) = \tilde{s}^{(2)}(\tau) = e^{\int_0^\tau \hat{\mu}(\sigma) \cdot r^{(1)}(\sigma) d\sigma}$ . Die zur Lösung des linearen Gleichungssystems notwendigen Integrale lösen wir ebenfalls mit der Simpson-Regel

$$\langle h_j, f \rangle = \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot h_j(\tau) \cdot f(\tau, 2) d\tau ; j = 0, \dots, 14 \quad (63)$$

und erhalten damit die  $c_j^{(2)}$ ,  $j = 0, \dots, 14$ .

Wir setzen im Hinblick auf Formel (60)  $g^{(2)}(\tau) = \sum_{m=0}^{\kappa} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(2)}(\bar{t}) \cdot b_m \cdot \beta_k(\tau) \cdot \alpha_m(\tau)$ . Wegen

Satz 5.1 gilt 
$$\int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot g^{(2)}(\tau) \cdot f(\tau, 2) d\tau = \int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot g^{(2)}(\tau) \cdot g_0^{(2)}(\tau) d\tau$$

mit der BA  $g_0^{(2)}(\tau) = \sum_{j=0}^{14} c_j^{(2)} \cdot h_j(\tau) \in G$  an  $f(\tau, 2)$ . Nach kurzer Umformung erhalten wir daraus

$$\int_{x_0}^{\omega} v(\tau) \cdot g^{(2)}(\tau) \cdot f(\tau, 2) d\tau = \sum_{j=0}^{14} c_j^{(2)} \cdot \left( \Lambda(x_0, h_j(\tau) \cdot g^{(2)}(\tau)) - \Lambda(\omega, h_j(\tau) \cdot g^{(2)}(\tau)) \right).$$

Mit der Transformationstabelle aus Abschnitt 3 folgt dann

$$\Lambda(x_0, h_j(\tau) \cdot g^{(2)}(\tau)) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(2)}(\bar{t}) \cdot \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot \frac{e^{-(s+k+m+j) \cdot x_0}}{s+k+m+j} ; j = 0, \dots, 14.$$

Ebenso gilt  $\langle h_i, h_j \rangle = \Lambda(x_0, h_j(\tau) \cdot h_i(\tau)) - \Lambda(\omega, h_j(\tau) \cdot h_i(\tau))$

und  $\Lambda(x_0, h_j(\tau) \cdot h_i(\tau)) = \frac{e^{-(s+i+j) \cdot x_0}}{s+i+j} ; i, j = 0, \dots, 14.$

Entsprechend ist

$$\Lambda(\omega, h_j(\tau) \cdot g^{(2)}(\tau)) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(2)}(\bar{t}) \cdot \sum_{m=0}^{\kappa} b_m \cdot \frac{e^{-(s+k+m+j) \cdot \omega}}{s+k+m+j} ; j = 0, \dots, 14.$$

und  $\Lambda(\omega, h_j(\tau) \cdot h_i(\tau)) = \frac{e^{-(s+i+j) \cdot \omega}}{s+i+j} ; i, j = 0, \dots, 14.$

Die Laplace-Transformation gewährleistet damit die explizite Lösbarkeit der Integrale des linearen Gleichungssystems. Eine weitere Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate oder eines sonstigen Näherungsverfahrens, über die zur Bestimmung der Koeffizienten  $c_j^{(2)}$  mit den Formeln (61) und (63) hinaus, ist nicht notwendig. Damit sind die Koeffizienten  $c_j^{(2)}$  festgelegt.

Wir unterstellen im Teilkollektiv  $K_1$  dieselben Verhältnisse wie in  $K_2$ , das heißt die Gewichtung der Messwerte in den einzelnen Beobachtungsjahre  $r_t^{(1)}(\sigma) = r_t^{(2)}(\sigma)$  wie in Tabelle 3 und die Sterblichkeitsverbesserung  $s_t^{(1)}(\sigma) = s_t^{(2)}(\sigma)$  wie in Abschnitt 4. Entsprechend ergeben sich  $\tilde{u}^{(1)}(\tau, \bar{t})$  und die Parameter  $a_k^{(1)}(\bar{t})$ . Mit Formel (56) ist

$$f(\tau, 1) = \tilde{s}^{(1)}(\tau) = e^{-\int_0^{\tau} \hat{\mu}(\sigma) \cdot r^{(2)}(\sigma) d\sigma}.$$

Wir setzen  $u^{(1)}(\tau, \bar{t}) \approx \tilde{u}^{(1)}(\tau, \bar{t}) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k^{(1)}(\bar{t}) \cdot \beta_k(\tau); a_k^{(1)}(\bar{t}) \in \mathbb{R}$  und berechnen die Koeffizienten  $c_j^{(1)}$  durch Formel (61), wobei wir wieder die Simpson-Regel verwenden. Mit analoger Vorgehensweise wie im Fall  $i = 2$  erhalten wir den Lösungsvektor. Unterstellen wir gleiche Gewichtung für alle Alter, so ergeben sich als Barwerte der Aufwendungen in den Teilbeständen für eine Gesamtbestandsrentenzahlung (BwA) von 1 zu den Zinssätzen:

Tabelle 9; Aufwendungen BwA bei verschiedenen Zinssätzen und disjunkter Segmentierung

Zinssatz	BwA $K_1$	BwA $K_2$
2,75 %	6,699	10,046
3,25 %	6,433	9,635
3,75 %	6,186	9,255
4,75 %	5,740	8,577
5,75%	5,352	7,991

Um den Fehler abzuschätzen, betrachten wir Corollar 5.3. Durch Auswertung der Funktionen, analog dem Vorgehen in Abschnitt 4, erhalten wir bei einem Rechnungszins von 2,75 % mit  $\text{Max}_{\tau \in [x_0, \omega]}(\tilde{s}^{(i)}(\tau)) \leq 1$  für  $i = 1, 2$  eine Abschätzung des maximalen Fehlers durch

$$\frac{\varepsilon \cdot M \cdot 2}{s \cdot v(x_0)} \cdot \text{Max}_{\tau \in [x_0, \omega]}(\tilde{s}^{(i)}(\tau)) \leq 0,0578 \quad i = 1, 2.$$

Damit beträgt der Fehler weniger als  $\frac{0,0578}{6,699} \approx 0,9 \%$  für  $i = 1$  bzw.  $0,6 \%$  für  $i = 2$  des Barwerts der jeweiligen Aufwendungen.

## LITERATUR

- [1] Arbeitsgruppe „Biometrische Rechnungsgrundlagen“ der DAV: Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen; (Richtlinie) Stand 21.05.2004.
- [2] DAV-Mitteilung Nr. 12: Tarifunterscheidung nach dem Rauchverhalten aus aktuarieller Sicht, April 1998
- [3] Disch, B.: Present Values, Segmentation and Approximation Theory, Blätter der DGVM Band XXVI, Heft 2, November 2003.
- [4] Disch, B.: Segmentierung von Lebensversicherungsbeständen unter numerischen Aspekten; Blätter der DGVM Band XXIII, Heft 3, April 1998.
- [5] Dyke, P. P. G.: An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series, Springer Verlag London Berlin Heidelberg, 2001.
- [6] Reichel, G.: Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung, Teil 1: Von der Versicherungsfunktion zum Leistungsbarwert. Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 3 der DGVM; VVW Karlsruhe 1975.
- [7] Statistisches Bundesamt: Statistisches Jahrbuch 2003 für die Bundesrepublik Deutschland, Wiesbaden 2003; im INTERNET: <http://www.destatis.de/basis/d/gesu/gesutab7.php> .