

# Gestion du niveau de la franchise d'un contrat avec bonus-malus

Pierre Thérond <sup>\*†‡</sup>      Stéphane Bonche<sup>§</sup>

## Résumé

Réduire la franchise d'un contrat d'assurance permet d'améliorer la qualité du contrat du point de vue de l'assuré. Pour l'assureur, une telle décision va avoir des effets mécaniques : il va payer davantage pour les sinistres pour lesquels il payait déjà et va se voir déclarer les sinistres dont les montants sont compris entre la nouvelle et l'ancienne franchise. Or l'assureur ne dispose pas d'information concernant le nombre de ces sinistres, il va donc devoir faire des hypothèses sur la forme de la distribution du coût des sinistres supérieurs à la nouvelle franchise. Dans le modèle collectif, ce travail est facilité par la propriété d'indépendance entre les coûts et le nombre de sinistres que l'on conserve quel que soit le niveau de la franchise.

Par ailleurs, lorsque le contrat est tarifé grâce à un système bonus-malus, le phénomène connu sous le nom de "soif de bonus" a pour conséquence de tronquer partiellement l'information concernant les sinistres dépassant la franchise. En effet les assurés vont conserver à leur charge les sinistres de faible coût de manière à ne pas voir augmenter leurs primes futures. Après avoir analysé ce phénomène, nous proposons un modèle dans le but d'estimer les caractéristiques des sinistres qui n'ont pas été déclarés.

Au final, une illustration de l'impact sur la prime pure d'une réduction de franchise d'un contrat avec bonus-malus est proposée.

MOTS-CLEFS : franchise déductible, modèle collectif, bonus-malus, soif de bonus, *véritable franchise*.

KEYWORDS : deductible, collective model, bonus-malus, hunger for bonus, *true deductible*.

*JEL Classification* : C51, G22.

---

\* Actuaire consultant chez WINTER & Associés, doctorant et chargé de cours à l'ISFA.  
Contact : +33 (0) 4 37 37 80 90, ptherond@winter-associes.fr.

† Cabinet WINTER & Associés - 18, avenue Félix Faure F-69007 Lyon et 43-47, avenue de la Grande Armée F-75116 Paris.

‡ ISFA, Université Lyon 1 - 50, avenue Tony Garnier F-69007 Lyon.

§ Actuaire chez NewRe. Contact : stbonche@yahoo.fr.

# 1 Introduction

Les récentes mesures pour lutter contre l'insécurité routière ont eu un impact important sur le nombre de tués sur les routes françaises. Sur ces bases, de nombreuses associations de consommateurs ont réclamé aux assureurs la répercussion de cette amélioration sur leurs tarifs. Dans ce contexte, certains assureurs ont été tentés de diminuer le niveau de leur franchise plutôt que de diminuer leurs primes. La diminution de la franchise est, en effet, un moyen d'améliorer la qualité du contrat du point de vue de l'assuré tout en conservant un volant financier important à placer sur les marchés financiers.

Il s'agit néanmoins de bien peser les conséquences d'une telle politique. Au-delà des aspects sociaux d'une telle mesure - l'amélioration du contrat ne profite qu'aux *mauvais conducteurs* qui ont des sinistres - la mise en oeuvre technique d'une telle mesure n'est pas aisée. En effet, de manière mécanique l'assureur va se retrouver à payer davantage pour les sinistres qu'il réglait déjà et va voir apparaître de nouveaux sinistres dont le montant est compris entre la nouvelle et l'ancienne franchise. Or l'assureur ne dispose pas d'information au sujet de ces sinistres ; en particulier, il n'en connaît ni le coût (qui est toutefois majoré par le niveau de l'actuelle franchise), ni surtout le nombre.

A ce phénomène mécanique s'ajoute un phénomène économique connu sous le nom de soif de bonus (*hunger for bonus*) qui a notamment été étudié dans Lemaire (1977). Cette soif de bonus conduit les assurés à ne pas déclarer certains sinistres supérieurs à la franchise de manière à éviter un malus sur les primes futures. C'est ce comportement qui a conduit Holtan (2000) à distinguer la *véritable franchise* (le montant à partir duquel un sinistre est déclaré) de la franchise contractuelle. Ce comportement conduit à une tronquature partielle des données de sinistres supérieurs à la franchise contractuelle. En particulier en France, les contrats auto étant obligatoirement assortis d'un système bonus-malus indépendant des montants de sinistres, certains sinistres supérieurs à l'ancienne franchise, que les assurés ne déclaraient pas en vue d'éviter un malus, vont à présent l'être. L'assureur n'ayant pas eu connaissance de ces sinistres, leur intégration dans le calcul de la prime va devoir reposer sur des estimations réalisées en faisant des hypothèses sur le comportement des assurés vis-à-vis de la déclaration ou non des sinistres.

Ces différents phénomènes vont être étudiés successivement. Dans un premier temps, nous nous placerons dans le cadre idéal où l'assureur dispose de toutes les informations relatives aux sinistres dont le montant dépasse le niveau de la franchise et étudierons quelles sont les méthodes à sa disposition pour estimer la charge des sinistres dont le montant est inférieur à la franchise.

Ensuite, nous verrons de quelle manière la soif de bonus altère l'information dont dispose l'assureur vis-à-vis des sinistres dépassant la franchise

contractuelle et de quelle manière celui-ci peut utiliser les caractéristiques du système bonus-malus pour améliorer sa connaissance des sinistres non déclarés. En particulier, la modélisation en chaîne de Markov des systèmes bonus-malus à classes (cf. Lemaire (1995) et Kelle (2000)) permet une formalisation générale de ce comportement. Le raisonnement effectué dans un premier temps sur un assuré particulier est ensuite étendu au collectif de risques.

Cet article est un prolongement des travaux réalisés par Bonche et al. (2005).

## 2 Réduction de franchise en l'absence de système bonus-malus

Dans cette partie, nous nous plaçons dans le cadre d'un contrat ne faisant pas l'objet d'une personnalisation *a posteriori* du tarif fondée sur la sinistralité individuelle des assurés : la prime que paie l'assuré est identique à celle des assurés appartenant à la même classe de risque ; elle n'est pas révisée en fonction de sa sinistralité individuelle.

Dans ce cadre, nous supposons que tous les sinistres dont le montant est supérieur à la franchise sont déclarés, puisqu'il n'est pas rationnel de ne pas déclarer de tels sinistres (cela n'engendre pas d'augmentation de la prime future).

Après avoir rappelé les caractéristiques du modèle collectif en l'absence de franchise, nous étudions l'impact de la mise en place d'une franchise déductible sur la loi de la charge des sinistres nets de franchise puis les conséquences d'une diminution de la franchise sur le niveau de la prime pure.

### 2.1 Notations et hypothèses

Dans la suite, nous noterons  $X_1, X_2, \dots$  les montants de sinistres survenus et  $N$  la variable aléatoire modélisant le nombre total de sinistres touchant le portefeuille de l'assureur (que ceux-ci soient ou non déclarés).

En l'absence de franchises, le montant total des sinistres à la charge de l'assureur est donné par la variable aléatoire  $S$  définie par

$$S := \sum_{i=1}^N X_i. \quad (1)$$

Conformément aux hypothèses classiques du modèle collectif, nous supposons donc que les coûts individuels de sinistres  $X_1, X_2, \dots$  sont mutuellement indépendants et identiquement distribués et que les variables aléatoires  $N, X_1, X_2, \dots$  sont mutuellement indépendantes. Par ailleurs, nous noterons  $F$  la fonction de répartition de  $X_1$ . Connaissant les lois du nombre de sinistres et des montants de sinistres, il est possible d'extraire la loi de la

charge brute de sinistres. En effet,

$$\Pr(S \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(s), \quad (2)$$

où  $F^{*n}$  désigne le produit de convolution à l'ordre  $n$  de  $F$ , *i.e.* la fonction de répartition de  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  et  $p_n := \Pr(N = n)$ .

Ce résultat classique est obtenu à l'aide du théorème des probabilités totales en conditionnant par rapport au nombre de sinistres survenus. En pratique, l'obtention de loi de  $S$  est l'objet de procédures telles que l'algorithme de Panjer (cf. Partrat and Besson (2005)) qui, le plus souvent, nécessitent la discrétisation des lois des montants individuels de sinistres. Ce sujet fait l'objet de développements à part entière sur lesquels nous ne nous attarderons pas davantage.

Considérons à présent un contrat de franchise déductible  $d$ . Nous noterons  $N_d$  le nombre de sinistres strictement supérieurs à  $d$  et  ${}_dX_1, {}_dX_2, \dots$  les montants des sinistres à la charge de l'assureur, de fonction de répartition  ${}_dF$ , dont la loi est donnée par

$${}_dF(x) := \Pr({}_dX \leq x) = \Pr(X \leq x + d \mid X > d). \quad (3)$$

Le montant total de sinistres à la charge de l'assureur, que nous noterons  $S_d$ , est donné par

$$S_d := \sum_{i=1}^N (X_i - d)^+ = \sum_{j=1}^{N_d} {}_dX_j. \quad (4)$$

Quels que soient  $\delta \geq 0$  et  $d \geq \delta$ , l'ordre stochastique ( $\prec_{st}$ ) (cf. Planchet et al. (2005)) permet de classer  $S, S_d$  et  $S_\delta$  :

$$S_d \prec_{st} S_\delta \prec_{st} S. \quad (5)$$

Ce résultat traduit formellement l'intuition que le risque supporté par l'assureur est d'autant plus petit que la franchise est grande.

## 2.2 Caractéristiques de l'engagement avec franchise

Dans ce paragraphe, nous étudions l'impact de la mise en place de la franchise sur le coût et le nombre des sinistres restant à la charge de l'assureur. Une attention particulière est accordée à la loi de la charge totale de ces sinistres.

### 2.2.1 Coût des sinistres dépassant la franchise

La suite  $({}_dX_j)_{j \geq 1}$  peut être définie à partir de la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$ . En effet, pour tout  $j \geq 1$ ,

$${}_dX_j = X_{U_j} - d, \quad (6)$$

où  $U_j := \inf \left\{ k \in \mathbf{N}^* \mid \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{X_i > d} = j \right\}$ . Les termes de la suite  $(U_j)_{j \geq 1}$  prennent pour valeurs, dans leur ordre croissant, les indices des termes de la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  qui dépassent la franchise.

Comme la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  est mutuellement indépendante et identiquement distribuée, il en est de même pour la suite  $({}_dX_j)_{j \geq 1}$ . La loi de  ${}_dX_1$  est donnée par

$${}_dF(y) = \Pr[{}_dX_1 \leq y] = \frac{F(d+y) - F(d)}{1 - F(d)}. \quad (7)$$

### 2.2.2 Nombre de sinistres dépassant la franchise

La loi de  $N_d$  est obtenue en remarquant que

$$N_d = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{X_n > d}, \quad (8)$$

et en utilisant le théorème des probabilités totales en conditionnant par rapport à  $N$ , ce qui nous permet d'écrire

$${}_d p_k := \Pr(N_d = k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Pr \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k \right). \quad (9)$$

Puisque les  $X_1, X_2, \dots$  sont indépendants, on a

$$\Pr \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k \right) = C_n^k (1 - \Pr(X \leq d))^k (\Pr(X \leq d))^{n-k}. \quad (10)$$

Comme de plus, les  $k$  premiers termes de la somme sont nuls, la loi de  $N_d$  est donc donnée par

$${}_d p_k = \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k (1 - F(d))^k (F(d))^{n-k} p_n. \quad (11)$$

### 2.2.3 Charge des sinistres nets de franchise

En présence d'une franchise, les hypothèses du modèle collectif nous permettent d'extraire aisément les deux premiers moments de  $S_d$ . En effet,

$$\mathbb{E}(S_d) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}[(X - d)^+] \quad (12)$$

et

$$\text{Var}(S_d) = \text{E}(N)\text{Var}[(X - d)^+] + \text{Var}(N)\text{E}[(X - d)^+]^2. \quad (13)$$

Le résultat suivant est fondamental, puisqu'il nous permet de continuer à travailler sous les hypothèses du modèle collectif lorsque l'on travaille avec une franchise.

**Proposition 1** *La variable aléatoire  $N_d$  est indépendante de la suite  $({}_dX_j)_{j \geq 1}$ .*

**Démonstration :** Ce résultat est démontré en annexe.  $\square$

Ainsi la loi de  $S_d$  est finalement donnée par

$$\Pr(S_d \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_dF^{*n}(s) {}_d p_n, \quad (14)$$

où  ${}_dF^{*n}$  désigne le produit de convolution à l'ordre  $n$  de  ${}_dF$ .

Cette propriété nous assure que, dès lors que l'on connaît les lois du coût et du nombre de sinistres et que l'on souhaite augmenter la franchise, on se retrouve dans une situation dont on connaît la loi de l'engagement de l'assureur et *a fortiori* la prime pure.

#### 2.2.4 Diminution de la franchise : impact sur la prime pure

Notons  $\Pi_d$  la prime pure du contrat avec une franchise déductible de niveau  $d$ . Supposons que l'assureur veuille diminuer cette franchise jusqu'à un niveau  $\delta < d$ . Comme présenté *supra*, l'augmentation de la prime pure peut être décomposée en deux effets : l'augmentation de la charge de l'assureur de  $d - \delta$  pour les sinistres qu'il réglait déjà et l'apparition des sinistres dont le montant est compris entre  $\delta$  et  $d$ . Formellement, on a

$$\Pi_\delta = \text{E}(N_\delta)\text{E}({}_\delta X). \quad (15)$$

L'équation (4) nous permet d'exprimer facilement  $\Pi_d$  en fonction de  $\Pi$ . En effet,

$$\Pi_d = \text{E}(N)\text{E}[(X - d)^+]. \quad (16)$$

Or

$$\Pr[(X - d)^+ \leq x] = \frac{\Pr(X - d \leq x | X > d)}{\Pr(X > d)}, \quad (17)$$

donc

$$\text{E}[(X - d)^+] = \frac{\text{E}(X - d | X > d)}{\Pr(X > d)}. \quad (18)$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\Pi_d = \frac{\mathbb{E}(X - d | X > d)}{\mathbb{E}(X) \Pr(X > d)} \Pi. \quad (19)$$

Cette expression ne fait pas apparaître explicitement le nombre des sinistres supérieurs à la franchise. Cette information est néanmoins contenue dans le rapport des termes  $\Pi$  et  $\Pr(X > d)$ .

En conséquence, une diminution de la franchise de  $d$  à  $\delta$ , entraînera une augmentation de la prime pure de  $\Pi_d$  à

$$\Pi_\delta = \frac{\mathbb{E}(X - \delta | X > \delta) \Pr(X > d)}{\mathbb{E}(X - d | X > d) \Pr(X > \delta)} \Pi_d. \quad (20)$$

Néanmoins, en pratique, on ne dispose pas d'information sur les sinistres dont le montant est compris entre  $\delta$  et  $d$ . En particulier, on ne connaît ni leur coût moyen ni leur nombre.

Pour calculer la nouvelle prime pure, l'assureur va donc devoir faire des hypothèses au sujet de la loi des montants de sinistres.

## 2.3 Modélisation des montants de sinistres

On a vu dans le paragraphe précédent, qu'il est suffisant de se donner la loi des montants de sinistres dépassant la nouvelle franchise  $\delta < d$  pour pouvoir déterminer la prime pure  $\Pi_\delta$ .

Une solution pratique consiste à faire des hypothèses sur la forme de la distribution des montants de sinistres qui dépassent  $\delta$  à estimer les paramètres de la loi retenue sur les données observées.

### 2.3.1 Choix de la loi sous-jacente

Ce choix constitue une étape primordiale dans notre problématique puisqu'il va conditionner les résultats de manière importante. Pour savoir vers quelle type de loi se tourner, on pourra se référer à Partrat and Besson (2005) qui présentent, pour les lois les plus usuelles, les principales branches d'assurance qu'elles se prêtent à modéliser. Pour aller plus loin, on trouvera dans Antal (2003) les lois les plus couramment utilisées en réassurance ainsi que des indications sur la valeur du paramètre de forme de certaines distributions pouvant s'appliquer à différents risques (lois Pareto-généralisée et Beta-généralisée).

### 2.3.2 Estimation des paramètres

La structure de la loi censée modéliser la variable "coût des sinistres de montant supérieur à  $\delta$ " choisie, l'estimation de ses paramètres pourra être effectuée par la méthode des moments ou par la méthode du maximum de

vraisemblance sur la distribution tronquée par la franchise actuelle  $d$ .

### Méthode des moments

A partir des réalisations de sinistres observées, l'assureur peut, par exemple, estimer les  ${}_d m_k := E(X^k | X > d)$  de manière à retrouver les paramètres de la loi de  $X$ . Cette méthode ne pourra néanmoins être mise en oeuvre que si ces moments existent jusqu'à un ordre au moins égal au nombre de paramètres à estimer.

Si l'assureur dispose d'un échantillon de  $n$  sinistres  $({}_d x_1, \dots, {}_d x_n)$  qui ont été déclarés (et donc qui dépassent le niveau de la franchise), il va pouvoir estimer les moments de la loi tronquée par

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n {}_d x_i^k \longrightarrow E[X^k | X > d]. \quad (21)$$

On aura, au préalable, exprimé  $E[X^k | X > d]$  en fonction des paramètres de la loi sous-jacente.

Certaines lois, telle que la loi de Pareto, se prêtent particulièrement à cet exercice ; pour d'autres des manipulations plus complexes devront intervenir. On trouvera, par exemple, dans Ter Berg (1994), les expressions des deux premiers moments d'une loi inverse gaussienne tronquée.

### Maximum de vraisemblance

Rappelons que si  $X$  admet une densité  $f$ ,  ${}_d X$  admet une densité  ${}_d f$  donnée par

$${}_d f(x) = \frac{f(d+x)}{1-F(d)}, x > 0. \quad (22)$$

Il s'agit pour l'assureur de déterminer les paramètres de la loi de  $X$  qui maximisent la vraisemblance

$$L({}_d x_1, \dots, {}_d x_n) = [1 - F(d)]^{-n} \prod_{i=1}^n f({}_d x_i + d). \quad (23)$$

Rappelons que, s'ils sont sans biais, les estimateurs du maximum de vraisemblance fournissent la meilleure estimation possible. Néanmoins, l'application de cette méthode sur une loi tronquée conduisant rarement à des expressions analytiques. Le cas échéant, on se tournera avec profit vers des techniques plus adaptées aux problèmes avec données incomplètes telles que l'algorithme EM (cf. Dempster et al. (1977)).

### 2.3.3 Exemple : Loi de Pareto

Supposons que l'on veuille ajuster nos données selon une loi de Pareto. Rappelons qu'une variable aléatoire  $X$  est distribuée selon une loi de Pareto de paramètres  $\alpha$  et  $d$  ( $X \sim \mathcal{P}ar(\alpha, d)$ ) si

$$\Pr(X \leq x) = \left\{ 1 - \left( \frac{d}{x} \right)^\alpha \right\} \mathbf{1}_{x>d}. \quad (24)$$

Une telle variable aléatoire possède des moments jusqu'à l'ordre  $[\alpha]$  qui sont donnés, pour  $k \in \{0, \dots, [\alpha]\}$ , par

$$\mathbb{E} \left[ X^k \right] = \frac{\alpha}{\alpha - k} d^k. \quad (25)$$

Dans notre situation, on supposera que le paramètre  $d$  est connu : c'est le montant de la franchise. La loi de Pareto possède la propriété de translation suivante qui s'avère utile dans notre problématique.

**Propriété 1** Si  ${}_dX \sim \mathcal{P}ar(\alpha, d)$ , alors pour tout  $\delta > d$ ,

$$\Pr({}_dX \leq x | {}_dX > \delta) = \Pr({}_\delta X \leq x), \quad (26)$$

où  ${}_\delta X \sim \mathcal{P}ar(\alpha, \delta)$ .

Cette propriété traduit le fait que si l'on modifie le niveau de la franchise, le paramètre de forme  $\alpha$  reste inchangé. En pratique, on pourra donc estimer  $\alpha$  sur les sinistres connus et utiliser le même  $\alpha$  pour tarifier le contrat avec une nouvelle franchise.

Concernant l'estimation du paramètre  $\alpha$ , le recours à la méthode des moments est à proscrire dans la mesure où leur existence n'est pas assurée. Il est donc naturel de se tourner vers la méthode du maximum de vraisemblance.

Connaissant le niveau de la franchise  $d$ , l'estimateur du maximum de vraisemblance pour  $\alpha$  est

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{1}{n} \sum_i \ln \frac{x_i}{d} \right)^{-1}. \quad (27)$$

Il convient de remarquer que, dans ce contexte de réduction de franchise, le choix de la loi de Pareto apparaît très prudent dans la mesure où la densité d'une telle loi est strictement décroissante : on supposera donc que dans l'intervalle de coût  $[\delta, d]$ , il y a plus de sinistres que dans n'importe quel autre intervalle de même taille avec des montants plus élevés.

### 3 Les systèmes bonus-malus (SBM)

En présence d'un système bonus-malus, nous allons voir que la situation se complexifie. En effet, les SBM étant, le plus souvent, indépendants des montants de sinistres, certains assurés ne déclarent pas des sinistres de montant faible de manière à ne pas voir leurs primes futures augmenter.

Après avoir présenté le système bonus-malus en vigueur en France, nous proposons de modéliser le comportement des assurés de manière à estimer les montants et surtout le nombre de sinistres supérieurs à la franchise mais non-déclarés.

#### 3.1 Généralités

En auto, la tarification des risques s'organise en deux étapes. On parle de tarifications *a priori* et *a posteriori*. Si la première repose sur les techniques de segmentation en fonction de caractéristiques de l'assuré (âge, sexe, puissance de la voiture, indications géographiques, etc.) qui doivent permettre à l'assureur d'affiner son jugement de la qualité du risque, la seconde dépend quant à elle directement de l'historique de sinistres du conducteur et passe, le plus souvent, par la mise en place d'un système bonus-malus, qu'il soit imposé par la réglementation (comme en France) ou établi par chaque compagnie. On trouvera dans Lemaire (1995) une présentation très complète des différents systèmes bonus-malus et de leurs propriétés mathématiques.

##### 3.1.1 Le système français

Concernant spécifiquement le système bonus-malus français, le lecteur en trouvera dans Partrat and Besson (2005) une description détaillée.

Il s'agit d'un système normalisé qui s'impose à tous les assureurs. Il consiste en l'introduction d'un coefficient de réduction (bonus) ou de majoration (malus) de la prime. Le niveau de ce coefficient dépend uniquement de l'historique des nombres d'accidents dont est responsable l'assuré. Il ne dépend aucunement du coût de ces sinistres.

Nous rappelons ici ses principales caractéristiques :

- Une année sans sinistre fait diminuer le coefficient de réduction-majoration des primes de 5 points de base.
- Chaque sinistre majore ce même coefficient de 25 points de base pour la prochaine période d'assurance.
- Le coefficient de réduction-majoration ne peut sortir de l'intervalle  $[0, 5; 3, 5]$ .
- Une clause de retour rapide est prévue : au bout de deux années sans sinistre responsable, l'assuré retrouve automatiquement un coefficient de 100 % s'il avait un malus.

- Une clause de protection des conducteurs disposant du bonus maximum (coef. = 0,5) depuis au moins trois ans leur permet de ne pas supporter de malus lors de leur prochain sinistre responsable.

### 3.2 Modélisation en chaîne de Markov

Le parcours d'un assuré dans une échelle bonus-malus à classes se décrit aisément à l'aide de la modélisation en chaîne de Markov. Ce point est notamment abordé dans Denuit and Charpentier (2005).

Considérons une échelle à  $s$  classes numérotées de 1 à  $s$  ordonnées selon leur coefficient de réduction-majoration auquel elles donnent droit ; la classe 1 étant celle donnant le droit à la plus forte réduction de prime.

Les règles de passage d'une classe à une autre dépendent, le plus souvent, du nombre de sinistres responsables causés dans l'année et plus généralement de l'historique sinistres dans sa globalité (par exemple, dans le SBM français, on perd automatiquement tout malus au bout de deux années sans sinistre responsable).

En dédoublant les classes, il est souvent possible de se ramener dans une situation où les règles de passage d'une classe à une autre dépendent exclusivement de la classe de départ et du nombre de sinistres causés dans l'année (cf. Kelle (2000) pour le cas français). Nous nous plaçons dans cette situation dans la suite de ce paragraphe.

#### 3.2.1 Le modèle

Intéressons-nous à un assuré dont le facteur de risque  $\theta$  sera supposé constant au cours du temps. Le parcours de cet assuré dans l'échelle peut être modélisé par le processus  $L = (L_k)_{k \in \mathbf{N}}$  où  $L_k$  désigne la classe occupée par l'assuré pendant la  $(k + 1)$ -ème période.

Notons  $p_\theta(l_1, l_2)$  la probabilité pour l'assuré de facteur de risque  $\theta$  de passer de la classe  $l_1$  à la classe  $l_2$  la période suivante, *i.e.*

$$p_\theta(l_1, l_2) := \Pr [L_{k+1} = l_2 | L_k = l_1, \Theta = \theta]. \quad (28)$$

Par définition,  $p_\theta(l_1, l_2) \in [0; 1]$  et  $\sum_{l_2} p_\theta(l_1, l_2) = 1$ . Aussi, la matrice

$$\mathbf{P}_\theta := \begin{pmatrix} p_\theta(1, 1) & \cdots & p_\theta(1, s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_\theta(s, 1) & \cdots & p_\theta(s, s) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

est la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours de l'assuré dans l'échelle bonus-malus. Dans la suite, nous nous placerons sous l'hypothèse que pour un facteur de risque donné, la probabilité de passer

d'un degré de l'échelle à un autre reste constante au cours du temps. Sous cette hypothèse la chaîne de Markov est donc homogène.

Notons  $\mathbf{p}_\theta^{(k)}(l_0)$  le vecteur de probabilité dont la  $l$ -ème composante est la probabilité qu'un assuré de facteur de risque  $\theta$  passe du degré  $l_0$  au degré  $l$  en  $k$  périodes.  $\mathbf{p}_\theta^{(0)}(l_0)$  est un vecteur formé d'un 1 dans sa  $l_0$ -ème composante et de 0 sur les autres. On a

$$\mathbf{p}_\theta^{(k)}(l_0)' = \mathbf{p}_\theta^{(k-1)}(l_0)' \mathbf{P}_\theta, \quad (30)$$

et

$$\mathbf{p}_\theta^{(k)}(l_0)' = \mathbf{p}_\theta^{(0)}(l_0)' \mathbf{P}_\theta^k. \quad (31)$$

La chaîne de Markov est ergodique : on peut atteindre, avec une probabilité strictement positive, n'importe quel état à partir de n'importe quel autre état au bout d'un temps fini. Elle est souvent de plus régulière, *i.e.* telle qu'il existe un entier  $\xi_0$  tel que tous les termes de la matrice  $\mathbf{P}_\theta^{\xi_0}$  soient strictement positifs. Comme de plus l'échelle admet un nombre fini de classes, elle admet toujours une distribution stationnaire, *i.e.* un vecteur  $\pi_\theta$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_\theta' = \pi_\theta' \mathbf{P}_\theta, \\ \pi_\theta' \mathbf{1}_s = 1. \end{array} \right\} \quad (32)$$

On dira que l'échelle bonus-malus est équilibrée, si le vecteur  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_s)$  des coefficients de réduction-majoration de la prime est tel que

$$\pi_\theta \rho = 1. \quad (33)$$

### 3.2.2 Illustration

Considérons une échelle bonus-malus à trois classes avec les règles de passage suivantes :

- une année sans sinistre responsable fait descendre d'une classe,
- une année avec au moins un sinistre responsable fait remonter à la classe n°3.

Supposons que le nombre annuel de sinistres causés par un assuré de facteur de risque  $\theta$  soit distribué selon une loi de Poisson de paramètre  $\theta$ . On fait donc ici l'hypothèse implicite que le comportement de l'assuré (modélisé par  $\theta$ ) n'est pas affecté par le degré dans lequel il se situe : il n'est pas plus, ou moins, prudent que s'il occupait un autre degré.

La probabilité qu'un tel assuré n'ait pas de sinistre dans l'année étant égale à  $e^{-\theta}$ , la matrice de passage de la chaîne de Markov vaut

$$\mathbf{P}_\theta = \begin{pmatrix} e^{-\theta} & 0 & 1 - e^{-\theta} \\ e^{-\theta} & 0 & 1 - e^{-\theta} \\ 0 & e^{-\theta} & 1 - e^{-\theta} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Cette chaîne de Markov admet pour distribution stationnaire

$$\pi_\theta = \begin{pmatrix} e^{-2\theta} \\ (1 - e^{-\theta}) e^{-\theta} \\ 1 - e^{-\theta} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Quelle que soit la classe de départ, cette distribution est atteinte au bout de deux périodes, *i.e.*

$$\forall l_0 \in \{1, \dots, 3\}, \mathbf{P}_\theta^{(2)}(l_0) = \pi_\theta. \quad (36)$$

### 3.3 Modèle d'anticipation d'un assuré

#### 3.3.1 Notations et hypothèses

Considérons la situation où l'assuré de facteur de risque  $\theta$  a un sinistre de montant  $x$  en toute fin d'année. La franchise du contrat vaut  $d$  et la prime pure correspondante  $\Pi_d$ . Ce tarif a été établi en référence à la classe de risque à laquelle l'assuré appartient sur la base de la segmentation *a priori* du portefeuille sans référence à l'historique individuel de sinistralité.

Ce contrat fait de plus l'objet d'une tarification d'expérience basée sur un système bonus-malus à  $s$  classes auxquelles correspondent les coefficients de réduction-majoration de la prime  $(\rho_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$ .

Notons  $L_1^+$  la classe dans laquelle se trouverait l'assuré en l'année suivante s'il déclarait le sinistre, et  $L_1^-$  la classe dans laquelle il se trouverait dans le cas contraire.

#### 3.3.2 Le modèle

Comme le souligne Lemaire (1977), la stratégie optimale de l'assuré est assez difficile à déterminer. Le point délicat n'est pas tant l'intégration dans le raisonnement des sinistres futurs mais plutôt la modélisation de l'anticipation qui en est faite par l'assuré. En effet, pour choisir s'il va, ou non, déclarer le sinistre, l'assuré compare l'estimation qu'il fait de ses primes futures actualisées dans les deux situations et déclarer le sinistre si la différence est inférieure à ce qu'il va recevoir de l'assureur pour le sinistre.

Pour modéliser cela nous proposons d'introduire :

- $\psi_k$  le facteur d'escompte "psychologique" (en base annuelle) de la prime à payer dans  $k$  années,
- $\hat{\theta}$  l'estimation faite par l'assuré de son propre facteur de risque,
- $\widehat{p_\theta^{(k)}}(i, j)$  l'estimation faite par l'assuré de la probabilité qu'il passe de la classe  $i$  à la classe  $j$  en  $k$  année et  $\mathbf{P}_{\hat{\theta}}^{(k)}$  la matrice associée.

L'assuré compare son estimation de la valeur actuelle probable des primes futures s'il déclare le sinistre

$$\Pi_d \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^+) \right)' \mathbf{P}_{\hat{\theta}}^{(k)} \rho e^{-\psi_k k}, \quad (37)$$

à celle obtenue s'il ne déclare pas le sinistre

$$\Pi_d \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^-) \right)' \mathbf{P}_{\hat{\theta}}^{(k)} \rho e^{-\psi_k k}. \quad (38)$$

Il y aura donc déclaration si

$$\Pi_d \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^+) - \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^-) \right)' \mathbf{P}_{\hat{\theta}}^{(k)} \rho e^{-\psi_k k} < x - d. \quad (39)$$

Du point de vue de l'assuré, la "franchise économique" du contrat vaut donc

$$d^{eco}(\theta, \psi, L_1^-, L_1^+) := d + \Pi_d \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^+) - \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^-) \right)' \mathbf{P}_{\hat{\theta}}^{(k)} \rho e^{-\psi_k k}. \quad (40)$$

Ce résultat met en évidence le fait, qu'en présence d'un système bonus-malus, la véritable franchise du contrat est une combinaison de la franchise contractuelle et de la perte de bonus. Ce point est notamment abordé dans Holtan (2000).

**Remarque :** Si la chaîne de Markov est régulière, il existe un entier  $\xi_1$  tel que

$$\left( \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^-) \right)' \mathbf{P}_{\hat{\theta}}^{(\xi_1)} = \left( \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^+) \right)' \mathbf{P}_{\hat{\theta}}^{(\xi_1)}, \quad (41)$$

et le critère devient alors

$$\Pi_d \sum_{k=0}^{\xi_1-1} \left( \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^+) - \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^-) \right)' \mathbf{P}_{\hat{\theta}}^{(k)} \rho e^{-\psi_k k} < x - d, \quad (42)$$

et la "franchise économique" du contrat vaut alors

$$d^{eco}(\theta, \psi, L_1^-, L_1^+) = d + \Pi_d \sum_{k=0}^{\xi_1-1} \left( \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^+) - \mathbf{p}_{\hat{\theta}}^{(0)}(L_1^-) \right)' \mathbf{P}_{\hat{\theta}}^{(k)} \rho e^{-\psi_k k}. \quad (43)$$

### 3.3.3 Illustration (suite)

Considérons l'échelle bonus-malus présentée dans le paragraphe 3.2.2. Les coefficients de réduction-majoration sont les suivants :

Classe	$\rho$
3	400 %
2	150 %
1	85 %

Supposons que l'assuré n'ait pas eu d'autre sinistre dans l'année : s'il le déclare, il sera l'année suivante directement dans la classe 3 ( $L_1^+ = 3$ ) ; s'il ne le déclare pas, il descendra d'une classe ( $L_1^- = \max\{L_0 - 1, 1\}$ ).

**Hypothèse :** L'assuré estime qu'il n'aura aucun sinistre avec une probabilité  $e^{-\tilde{\theta}}$  (cette situation est un cas particulier de celle où il modélise le nombre d'accidents qu'il va avoir au cours d'une année par une variable de loi de Poisson de paramètre  $\tilde{\theta}$ ).

Comme la probabilité estimée par l'assuré de ne pas avoir de sinistre au cours d'une année vaut  $e^{-\tilde{\theta}}$ , on a

$$\mathbf{P}_{\tilde{\theta}} = \begin{pmatrix} e^{-\tilde{\theta}} & 0 & 1 - e^{-\tilde{\theta}} \\ e^{-\tilde{\theta}} & 0 & 1 - e^{-\tilde{\theta}} \\ 0 & e^{-\tilde{\theta}} & 1 - e^{-\tilde{\theta}} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

On a vu que la chaîne de Markov de matrice de passage  $\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}$  est régulière et converge vers la distribution d'équilibre au bout de deux itérations. Il s'agit donc de déterminer si

$$\left( \mathbf{p}_{\tilde{\theta}}^{(0)}(L_1^+) - \mathbf{p}_{\tilde{\theta}}^{(0)}(L_1^-) \right)' \left( \mathbf{1}_{s,s} + e^{-\psi_1} \mathbf{P}_{\tilde{\theta}} \right) \rho < \frac{x - d}{\Pi_d}. \quad (45)$$

Que l'assuré soit initialement dans les classes n°1 ou n°2, la "franchise économique" sera la même puisque, dans les deux cas,  $L_1^- = 1$  et  $L_1^+ = 3$ . En revanche, cette franchise sera différente s'il est initialement dans la classe n°3 ( $L_1^- = 2$ ).

**Application numérique :** Avec  $\psi_1 = 10 \%$ ,  $\tilde{\theta} = 0,1$  et  $\Pi = 1000$ , on a

$$\begin{aligned} d^{eco}(L_0 = 1; 2) &= 3\ 682, \\ d^{eco}(L_0 = 3) &= 3\ 032. \end{aligned} \quad (46)$$

Ce résultat conduit à la conclusion que, si la SBM a atteint sa distribution d'équilibre, et La deuxième conclusion que l'on peut tirer de cet exemple est la suivante : compte-tenu de la composition d'équilibre du portefeuille et sous

l'hypothèse (qui sera levée dans le paragraphe suivant) que tous les assurés effectuent les mêmes estimations, les sinistres inférieurs à 3 032 ne sont pas déclarés et 86,6 % des sinistres compris entre 3 032 et 3 682 ne sont pas déclarés.

La première statistique nous permet de vérifier si le modèle est robuste. Quant à la deuxième, elle permet d'estimer le nombre réel de sinistres survenus dont le montant appartient à cette tranche de coût en divisant le nombre de sinistres déclarés sur cette plage par 86,6 %.

### 3.4 Modèle d'anticipation du portefeuille

L'assureur ne connaît pas individuellement les estimations faites par les assurés. En revanche, il peut faire des hypothèses sur le comportement global de son portefeuille à partir du modèle proposé pour un assuré.

#### 3.4.1 Notations et hypothèses

Considérons toujours le même contrat de franchise  $d$  et intéressons-nous à l'ensemble  $\Omega$  des assurés se trouvant dans la classe  $L_0$  et ayant eu un sinistre en toute fin de période.

Chacun de ces assurés calcule sa propre franchise économique  $d^{eco}$  de manière à déterminer s'il va déclarer son sinistre.

Ces franchises sont établies à partir des estimations individuelles  $\theta$ ,  $\mathbf{P}_\theta$  et  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots)$ . L'assureur ne sait pas quel assuré a fait quelles estimations. Il peut en revanche faire des hypothèses sur celles-ci de manière à déterminer la probabilité qu'un sinistre de montant  $x$  soit ou pas déclaré.

#### 3.4.2 Le modèle

Supposons que tous les assurés modélisent le nombre annuel de sinistres par une loi de Poisson dont le paramètre correspond à l'estimation  $\theta$  qu'ils ont de leur facteur de risque. Dans ce cas, l'estimation de la matrice de passage  $\mathbf{P}_\theta$  découle directement de celle de l'estimation  $\theta$ .

Par ailleurs, l'estimation  $(\theta, \psi)$  faite par un assuré en particulier peut être vu comme la réalisation d'un vecteur aléatoire  $(\Theta, \Psi_1, \Psi_2, \dots)$  de loi  $\mathbf{P}_{\Theta, \Psi}$ .

Dans ce cadre, en notant  $D^{eco}(L_0)$  la variable aléatoire dont une réalisation représente le niveau que doit atteindre un sinistre pour qu'il soit déclaré par un assuré du groupe  $\Omega$ , on a

$$\Pr [D^{eco}(L_0) \leq x] = \int \mathbf{1}_{[d^{eco}(\theta, \psi, L_0), \infty]}(x) d\mathbf{P}_{\Theta, \Psi}(\theta, \psi). \quad (47)$$

### 3.4.3 Illustration (suite)

## 4 Réduction de franchise en présence d'un système bonus-malus

Ce paragraphe a pour objet de rappeler la démarche à appliquer et à la mettre en oeuvre dans une illustration.

### 4.1 Récapitulatif de la procédure

Rappelons les différentes étapes qui vont permettre à un assureur d'estimer la charge moyenne (prime pure) résultant d'une diminution de la franchise d'un contrat avec bonus-malus. Ces étapes sont au nombre de trois :

1. Estimation des sinistres supérieurs à la franchise contractuelle qui ne sont pas déclarés du fait de la soif de bonus (cf. 3).
2. Estimation des sinistres compris entre l'ancienne franchise et la nouvelle franchise (cf. 2).
3. Estimation des sinistres qui ne seront pas déclarés du fait de la soif de bonus (cf. 3).

### 4.2 Illustration

## 5 Conclusion

L'impact sur la prime pure d'une réduction de franchise est délicat à anticiper. En effet l'assureur doit pour cela faire des hypothèses sur des données qu'il n'observe pas (données tronquées à gauche de la franchise contractuelle) ou qu'il n'observe que partiellement à cause du phénomène de "soif de bonus".

Dans cette article, nous avons présenté et illustré la démarche à suivre pour estimer la nouvelle prime pure. Celle-ci, bien que reposant sur un certain nombre d'hypothèse, a été rendue possible grâce à la conservation des hypothèses d'indépendance du modèle collectif lorsque l'on modifie le niveau de la franchise.

Outre les aspects sociaux d'une telle mesure qui ne favorise que les assurés qui ont des sinistres, la décision de réduire la franchise d'un contrat d'assurance doit être pilotée pour s'assurer que les réalisations observées sont en accord avec les hypothèses effectuées. On pourra en particulier suivre le ratio du nombre de sinistres observés entre la nouvelle et l'ancienne franchise et sa valeur théorique déduite du modèle utilisé.

*A contrario*, la décision d'augmenter le niveau de la franchise pose moins de problèmes sur le plan technique. Elle aura néanmoins pour conséquence non-négligeable de diminuer l'information disponible au sujet des sinistres.

## Références

- Antal, P. (2003). Quantitative methods in reinsurance. Notes de cours, ETH Zürich.
- Bonche, S., Brau, L., and Olympio, N. (2005). Decreasing the deductible in an automobile insurance policy. Mémoire de groupe de travail, ISFA.
- Dempster, A., Laird, N., and Rubin, D. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via em algorithm (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society B*, 39 :1–38.
- Denuit, M. and Charpentier, A. (2005). *Mathématiques de l'assurance non-vie*, volume 2. Economica.
- Holtan, J. (2000). Optimal loss financing under bonus-malus contracts. *ASTIN Bulletin*, 31(1) :161–73.
- Kelle, M. (2000). Modélisation du système bonus-malus français. *Bulletin français d'actuariat*, 7(7) :61–82.
- Lemaire, J. (1977). La soif du bonus. *ASTIN Bulletin*, 9 :181–90.
- Lemaire, J. (1995). *Bonus-malus systems in automobile insurance*. Kluwer Academic Publishers.
- Partrat, C. and Besson, J.-L. (2005). *Assurance non-vie. Modélisation, simulation*. Economica.
- Planchet, F., Thérond, P.-E., and Jacquemin, J. (2005). *Modèles financiers en assurance. Analyses de risque dynamiques*. Economica.
- Ter Berg, P. (1994). Deductibles and the inverse gaussian distribution. *ASTIN Bulletin*, 24(2) :319–23.

## A Modèle collectif en présence d'une franchise

Soient  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, à valeurs dans  $\mathbf{R}_+^*$  et  $N$  une variable aléatoire, à valeurs dans  $\mathbf{N}$ , indépendante de la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$ . Notons  $F$  la fonction de répartition de  $X_1$  et  $(p_n)_{n \geq 0}$  la loi de  $N$ . Soit  $d \geq 0$ , on a

$$\sum_{i=1}^N (X_i - d)^+ = \sum_{j=1}^{N_d} Y_j, \quad (48)$$

où  $N_d = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{X_i > d}$  et  $Y_j = X_{U_j} - d$  où  $U_j = \inf \left\{ k \in \mathbf{N}^* \mid \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{X_i > d} = j \right\}$ .

La suite  $(Y_j)_{j \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans  $\mathbf{R}_+^*$  et de même loi donnée par

$${}_dF(y) := \Pr[Y_1 \leq y] = \frac{F(d+y) - \pi}{1 - \pi}, \quad (49)$$

où  $\pi = \Pr[X \leq d]$ .

La variable aléatoire  $N_d$  est à valeurs dans  $\mathbf{N}$  et sa loi est donnée par

$${}_d p_k := \Pr[N_d = k] = \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k (1-\pi)^k (\pi)^{n-k} p_n. \quad (50)$$

Pour tout  $l \in \mathbf{N}^*$ ,  $U_l$  est à valeurs dans  $\mathbf{N}^*$  et sa loi est donnée par

$$\begin{aligned} \Pr[U_l = j] &= \Pr \left[ \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{1}_{X_i > d} = l-1, X_j > d \right] \\ &= C_{j-1}^{l-1} (1-\pi)^l \pi^{j-l}. \end{aligned} \quad (51)$$

**Proposition 2** La variable aléatoire  $N_d$  est indépendante de la suite  $(Y_j)_{j \geq 1}$ .

*Démonstration :* Soient  $l \geq 1$ ,  $k \in \mathbf{N}$  et  $y \in \mathbf{R}_+^*$ .

**Remarque 1 :** Comme  $N$  est indépendante de la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$ ,  $N$  est indépendante de  $U_l$ . Ainsi, pour tout  $j \geq l$ ,  $\Pr[N = n | U_j = l] = p_n$  et  $\Pr[U_j = l | N = n] = \Pr[U_j = l]$ .

**Remarque 2 :** Si  $(l \leq k, n < j - (l - k))$  ou  $(l > k, n > j - (l - k))$ , alors  $\Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k | U_l = j \right] = 0$ .

**Remarque 3 :** Pour tout  $j \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k, Y_l \leq y | U_l = j \right] = \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k | U_l = j \right] {}_d F(y).$$

En effet, pour  $j \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} &\Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k, Y_l \leq y | U_l = j \right] \\ &= \Pr \left[ \sum_{i=1, i \neq j}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k-1, X_j \leq d + y | U_l = j \right]. \end{aligned}$$

Comme la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  est mutuellement indépendante,

$$\begin{aligned} &\Pr \left[ \sum_{i=1, i \neq j}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k-1, X_j \leq d + y | U_l = j \right] \\ &= \Pr \left[ \sum_{i=1, i \neq j}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k-1 | U_l = j \right] {}_d F(y) \\ &= \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k | U_l = j \right] {}_d F(y). \end{aligned}$$

Pour  $j > n$ , le caractère i.i.d. des  $X_i$  implique directement le résultat.

**Cas 1 :**  $k \geq l$ . D'après la remarque 1, on a

$$\begin{aligned} \Pr [N_d = k, Y_l \leq y] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr [N_d = k, Y_l \leq y | N = n] p_n \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k, Y_l \leq y \right] p_n \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k, Y_l \leq y | U_l = j \right] \Pr [U_l = j]. \end{aligned}$$

D'après les remarques 2 et 3, on a

$$\begin{aligned} \Pr [N_d = k, Y_l \leq y] &= \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \sum_{j=l}^{n-k+l} {}_dF(y) \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k | U_l = j \right] \Pr [U_l = j] \\ &= {}_dF(y) \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr [U_l = j] \sum_{n=j+k-l}^{+\infty} p_n \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k | U_l = j \right]. \end{aligned}$$

Enfin, la remarque 1 permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Pr [N_d = k, Y_l \leq y] &= {}_dF(y) \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr [U_l = j] \Pr [N_d = k | U_l = j] \\ &= {}_dF(y) \Pr [N_d = k]. \end{aligned}$$

**Cas 2 :**  $k < l$ . D'après la remarque 1, on a

$$\begin{aligned} \Pr [N_d = k, Y_l \leq y] &= \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr [N_d = k, Y_l \leq y | U_l = j] \Pr [U_l = j] \\ &= \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr [U_l = j] \sum_{n=k}^{+\infty} \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k, X_j \leq d + y | U_l = j \right] p_n. \end{aligned}$$

D'après les remarques 2 et 3, il vient

$$\begin{aligned} \Pr [N_d = k, Y_l \leq y] &= \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr [U_l = j] \sum_{n=k}^{j-l+k} \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k | U_l = j \right] {}_dF(y) p_n \\ &= {}_dF(y) \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \sum_{j=n+l-k}^{+\infty} \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k | U_l = j \right] \Pr [U_l = j]. \end{aligned}$$

Enfin, la remarque 1 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\Pr [N_d = k, Y_l \leq y] &= {}_dF(y) \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > d} = k \right] \\ &= {}_dF(y) \Pr [N_d = k].\end{aligned}$$

Au final, pour tout  $l \in \mathbf{N}^*$ ,  $Y_l$  est indépendante de  $N_d$ . Par ailleurs, comme la suite  $(Y_j)_{j \geq 1}$  est mutuellement indépendante,  $N_d$  est indépendante de la suite  $(Y_j)_{j \geq 1}$ .  $\square$