

Etude de risque pour un portefeuille d'assurance récolte

Hervé ODJO
GROUPAMA
Direction ACTUARIAT Groupe
21, Bd Malesherbes
75008 Paris
Tél : 33 (0)1 44 56 72 46
herve.odjo@groupama.com

Viviane RITZ
GROUPAMA
Direction ACTUARIAT Groupe
21, Bd Malesherbes
75008 Paris
Tél : 33 (0)1 44 56 32 75
viviane.ritz@groupama.com

Résumé

Ce papier présente une étude du risque pour un portefeuille d'assurance récolte couvrant les pertes de rendement des agriculteurs, consécutives à des événements naturels (grêle, gel, sécheresse, tempête, ...). L'objectif de cette étude est de simuler la fonction de distribution de la charge de sinistres en tenant compte des dépendances entre les cultures, les zones géographiques et les agriculteurs. Ce papier traite également la réassurance et le besoin en capital pour le portefeuille. En guise d'illustration, le modèle est appliqué sur le portefeuille « Ferme France » constitué de l'ensemble des exploitations de la France Métropolitaine.

Mots Clés

Événements naturels, cultures, exploitations, agriculteurs, rendements, dépendance, copula, réassurance, mesures de risque, besoin en capital.

1. Introduction

Dans ce papier, nous présentons un modèle économique permettant d'étudier le risque lié à la souscription d'un portefeuille d'assurance récolte. L'objectif de ce modèle est :

- de simuler la charge de sinistre agrégée sur ce portefeuille en tenant compte des dépendances entre les agriculteurs,
- d'étudier l'impact de la réassurance sur le portefeuille,
- d'appliquer différents types de mesures de risque sur la charge de sinistre,
- d'étudier le besoin en fonds propres généré par ce portefeuille.

Dans la première partie de ce papier, nous présentons la problématique liée à l'étude du risque pour un portefeuille multirisque climatique. Nous y expliquons le fonctionnement de la police d'assurance, et les caractéristiques du risque d'un tel portefeuille.

Dans la deuxième partie, nous exposons le modèle actuariel utilisé pour étudier le risque et présentons un algorithme de simulation de la charge agrégée de sinistres.

Dans la troisième partie, nous présentons quelques applications possibles (étude de la réassurance, du besoin en capital, ...).

La quatrième partie est consacrée à une application pratique du modèle sur le portefeuille « Ferme France » composé de l'ensemble des agriculteurs de la France métropolitaine.

2. Description du problème et notations

2.1. La problématique

Les agriculteurs sont soumis à une variété de risques pouvant affecter leur revenu sur une période donnée (ici une année), dont l'un des plus importants est la baisse de leur production sur cette période. Dans la suite de ce papier, nous considérons un assureur ayant un portefeuille d'assurance couvrant ce risque et dont les assurés sont répartis sur différentes zones géographiques.

La survenance d'un événement climatique (grêle, gel, tempête, sécheresse, ...) ou d'une succession d'événements climatiques peut affecter plusieurs zones géographiques et donc la plupart des agriculteurs ayant leur activités dans ces zones géographiques. En fonction de l'intensité de ces événements et de leur étendue, ces sinistres peuvent entraîner des difficultés financières pour l'assureur considéré.

L'objectif de ce papier est de proposer un modèle économique permettant d'étudier le risque, pour un assureur, lié à ce portefeuille d'assurance.

L'objectif du modèle économique étudié dans ce papier est d'estimer la fonction de distribution de la charge de sinistres agrégée de l'assureur sur un portefeuille d'assurance récolte couvrant les pertes de rendement des agriculteurs.

Pour construire cette fonction de distribution, deux types de modèles peuvent être développés :

- Les modèles scientifiques (modèles basés sur des données géologiques, météorologiques et sur les caractéristiques physiques des différentes cultures considérées)
- Les modèles actuariels (modèles probabilistes et statistiques ou les paramètres sont estimés à partir de données historiques)

Le modèle proposé ici fait partie de la deuxième catégorie de modèles.

2.2. Le fonctionnement de la police d'assurance

Les polices d'assurance considérées couvrent les agriculteurs contre une perte de rendement (production par unité de surface) consécutive à la survenance d'événements climatiques. L'assureur intervient dès que le rendement d'un agriculteur donné est inférieur au rendement de référence, diminué d'une franchise, exprimée en pourcentage du rendement de référence. Les rendements de référence, le taux de franchise et le prix de référence sont définis à l'avance dans le contrat d'assurance. *Cette police ne couvre pas les variations des prix.*

Les agriculteurs pouvant pratiquer plusieurs cultures différentes, deux formes de contrats d'assurance ont été considérées :

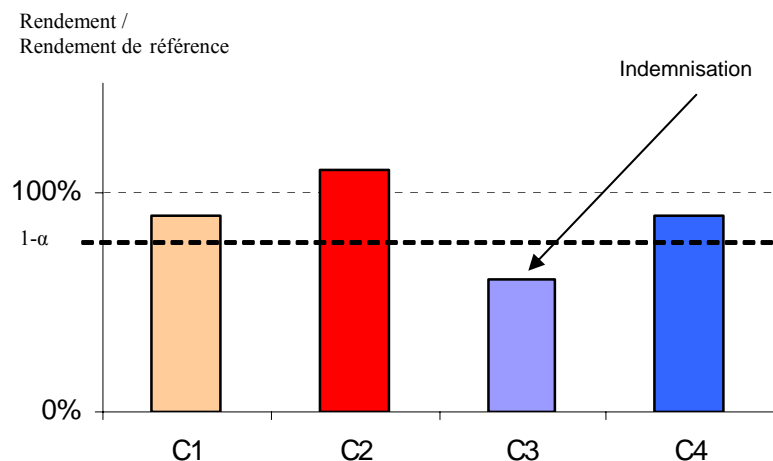
- une couverture par culture
- une couverture par exploitation

A. L'assurance par culture

L'assurance par culture couvre pour un agriculteur, la perte de rendement sur chaque culture de manière « indépendante ». Il intervient dès que pour une culture donnée, le rendement est inférieur au rendement de référence diminué de la franchise. Il n'y a pas de compensation entre les différentes cultures ; chaque culture est considérée de façon séparée. De plus, les niveaux de franchise sont fixés par culture.

Pour illustrer le fonctionnement de cette assurance, supposons pour simplifier que le taux de franchise α soit le même pour toutes les cultures (par exemple 20%). Considérons un agriculteur pratiquant 4 cultures. Le graphique suivant présente, pour chaque culture, le rapport entre le rendement de la période couverte et le rendement de référence.

Graphique 1 : Fonctionnement de la police par culture



L'indemnisation de l'assuré est effectuée culture par culture. D'après ce graphique, seule la culture C3 est indemnisée. Son indemnisation ne tient pas compte des rendements des autres cultures.

Pour ce type d'assurance, la prime payée par l'assuré ne doit pas dépendre des niveaux de dépendance entre les cultures au sein de l'exploitation.

B. L'assurance par exploitation

L'assurance par exploitation, quant à elle, couvre l'agriculteur contre la perte du rendement total de son exploitation. Cette approche tient compte des compensations possibles entre les différentes cultures de l'exploitation et des corrélations entre les rendements. Dans le cas de la police par exploitation, il serait difficile de parler de rendement. On parlera plutôt de rendement monétaire sur l'exploitation. En effet, les différentes cultures produites par un

même agriculteur ne sont pas valorisées au même prix et n'ont pas la même pondération dans la perte totale sur l'exploitation. Ici, la franchise est égale à la somme des valeurs monétaires des franchises par culture. Ceci est illustré par les formules suivantes :

Considérons un agriculteur pratiquant q cultures ($q=1, 2, 3, \dots$). Notons pour $1 \leq j \leq q$:

- \tilde{R}_j , le rendement de la j ème culture
- V_j , la surface cultivée pour la j ème culture
- P_j , le prix assuré pour la j ème culture
- α_j , le taux de franchise pour la culture j

Le rendement monétaire pour la culture j est donné par : $RM_j = P_j \times V_j \times \tilde{R}_j$

Le rendement monétaire de référence pour la culture j est donné par :
 $RM_{ref,j} = P_j \times V_j \times R_{ref,j}$

Le montant de la franchise pour la culture j est égal à : $FM_j = P_j \times V_j \times \alpha_j \times R_{ref,j}$

Le rendement monétaire total sur l'exploitation est : $RM = \sum_{j=1}^q RM_j$

Le rendement monétaire de référence sur l'exploitation est : $RM_{ref} = \sum_{j=1}^q RM_{ref,j}$

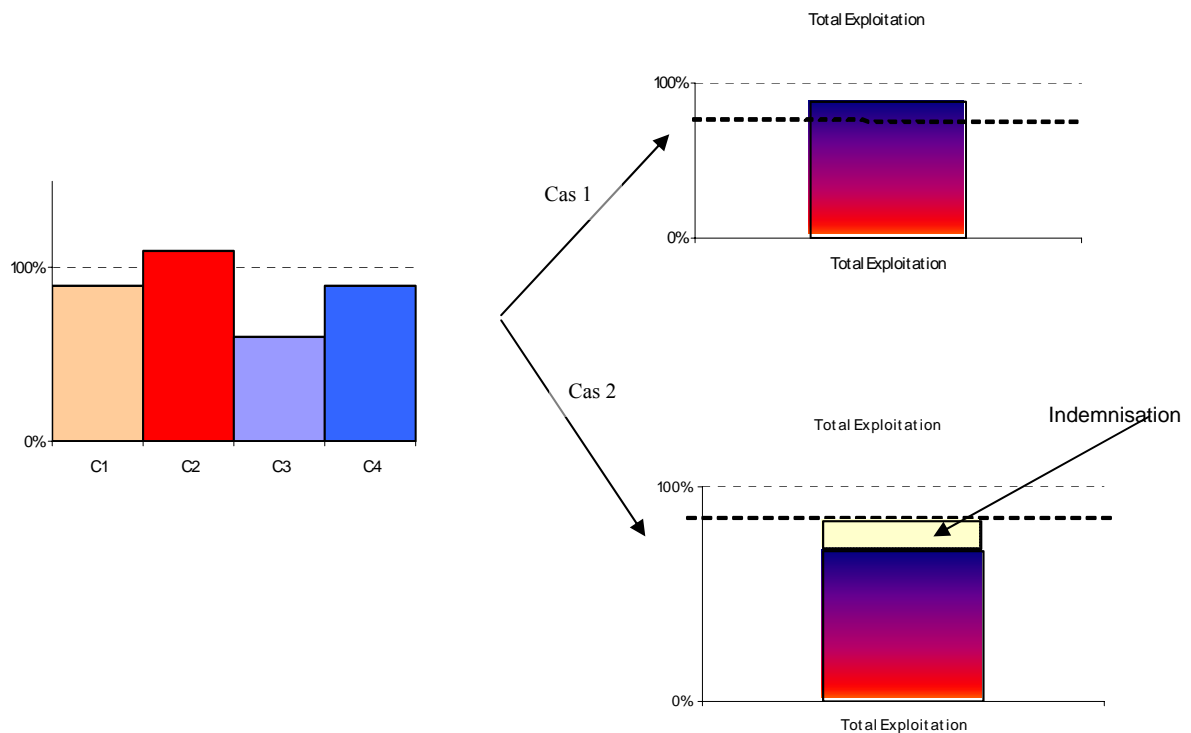
Le montant total de la franchise pour l'exploitation est : $FM = \sum_{j=1}^q FM_j$

Pour ce type d'assurance, il y a sinistre lorsque le rendement monétaire sur l'exploitation est inférieur au rendement monétaire de référence déduction faite de la franchise totale :
 $RM < RM_{ref} - FM$

La baisse de rendement sur certaines cultures peut être compensée par des rendements élevés sur d'autres cultures. Pour ce type d'assurance, la prime payée par l'assuré devrait dépendre fortement du niveau de dépendance entre les cultures au sein de l'exploitation de l'agriculteur.

Le fonctionnement de la police est illustré par le graphique suivant :

Graphique 2 : Fonctionnement de la police par exploitation



- **Cas 1 :** Même si dans l’approche par culture l’agriculteur est indemnisé pour la culture C3, il est possible que dans l’approche par exploitation, la compensation entre les culture entraîne que le rendement monétaire total soit supérieur au rendement monétaire de référence déduction faite de la franchise totale ($RM \geq RM_{ref} - FM$). Dans ce cas l’assuré n’est pas indemnisé.
- **Cas 2 :** Il est possible que même après la compensation entre les cultures, le rendement monétaire total soit inférieur au rendement monétaire de référence déduction faite de la franchise totale ($RM < RM_{ref} - FM$). Dans ce cas, l’assuré est indemnisé.

Dans l’approche par exploitation, l’assuré est indemnisé moins souvent (avec un niveau d’indemnisation plus bas) que dans le cas de l’assurance par culture. Avec un même niveau de franchise sur toutes les cultures, les deux polices sont équivalentes dans le cas de la dépendance parfaite positive entre les différentes cultures.

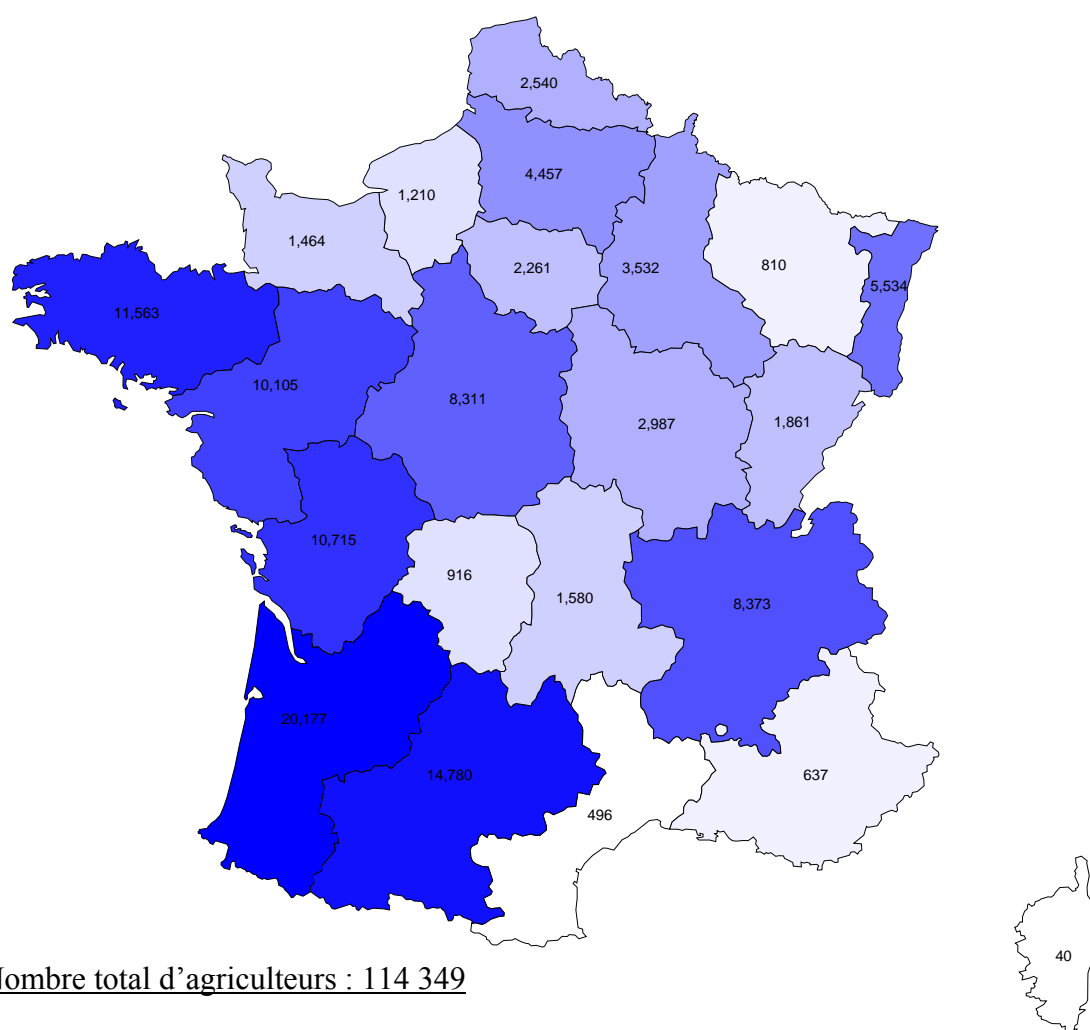
Tout au long de cet article, seule la première approche (assurance par culture) est considérée dans le cadre du modèle économique.

2.3. Le risque lié au portefeuille d'assurance

Nous considérons un portefeuille d'assurance composé d'agriculteurs répartis sur plusieurs zones géographiques et pratiquant plusieurs types de cultures. A titre d'exemple, les cartes suivantes montrent pour une culture donnée, la répartition par région administrative en France Métropolitaine :

- du nombre d'agriculteurs,
- de la surface totale cultivée

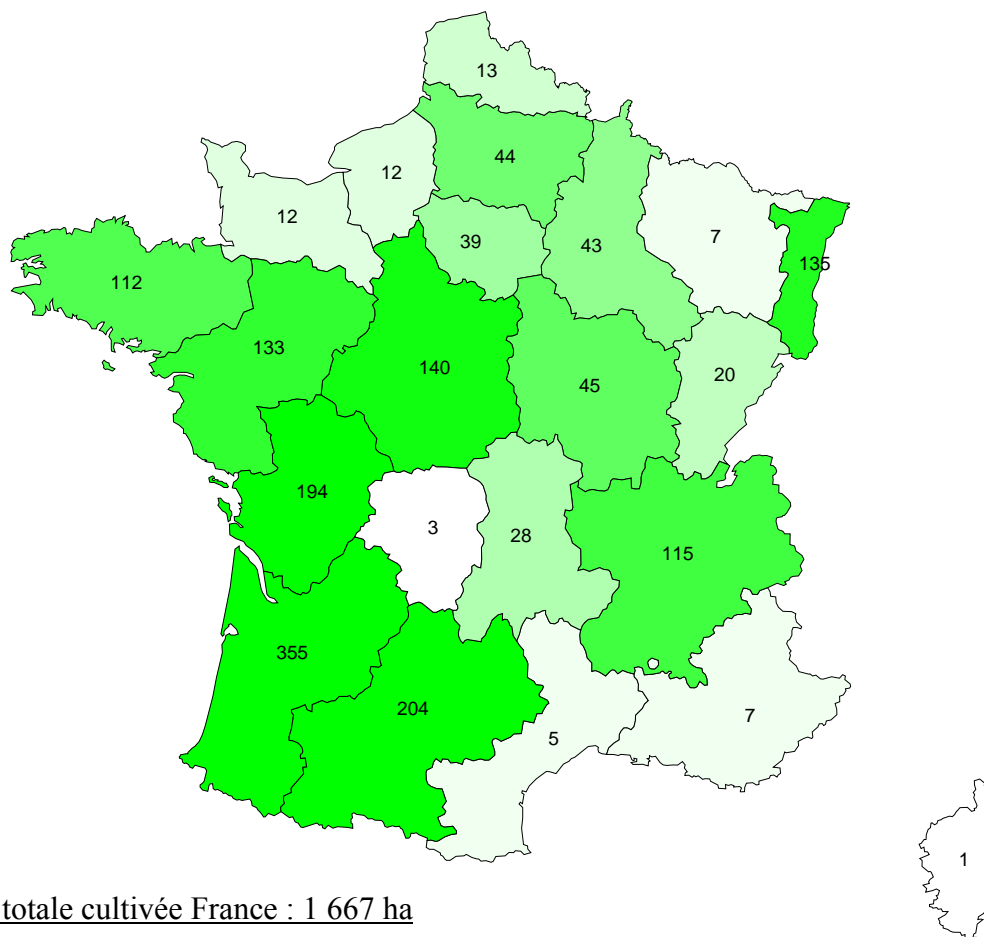
Graphique 3 : Nombre d'agriculteurs produisant le maïs par région administrative



Nombre total d'agriculteurs : 114 349

Source : Statistiques Agreste

Graphique 4 : Surface totale cultivée en maïs par région administrative (en milliers d'ha)



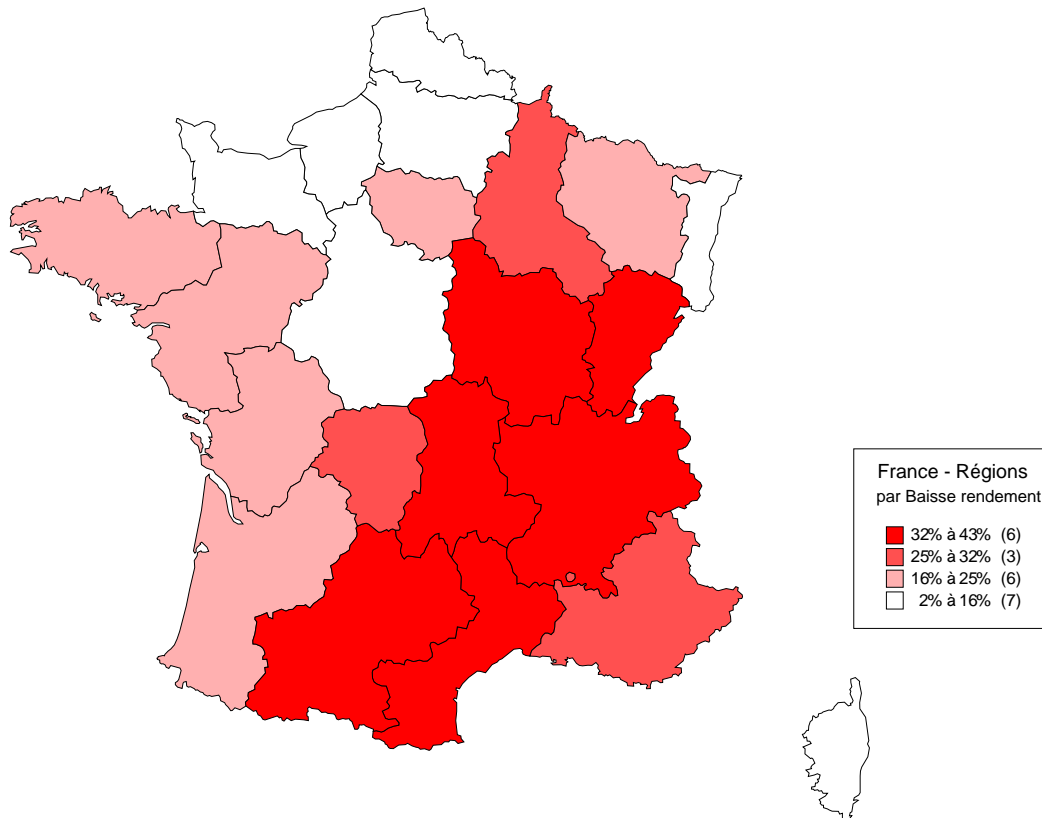
Surface totale cultivée France : 1 667 ha

Source : Statistiques Agreste

Le principal risque pour l'assureur sur ce portefeuille provient de la dépendance entre les rendements des différentes cultures pratiquées sur les différentes zones géographiques. En effet, la survenance d'un événement climatique (par exemple une tempête ou une sécheresse) peut affecter plusieurs zones géographiques et/ou plusieurs cultures à la fois. Lorsqu'un événement touche une zone géographique et en fonction de son ampleur, il est susceptible de toucher plusieurs polices de cette zone géographique.

A titre d'exemple, le graphique suivant montre l'impact de la sécheresse 2003 sur les rendements du maïs par région administrative.

Graphique 5 : Répartition des baisses de rendement du maïs consécutives à la sécheresse 2003
(Baisse exprimée en pourcentage du rendement espéré)



Source : Statistiques Agreste

Ce graphique montre bien que la plupart des régions produisant du maïs en France Métropolitaines ont été touchée par la sécheresse 2003.

Ainsi, plusieurs types de dépendances doivent être prises en compte dans le modèle économique. Il s'agit de :

- la dépendance entre deux agriculteurs pratiquant la même culture sur la même zone géographique,
- la dépendance entre deux cultures différentes (pour deux agriculteurs différents ou pour le même agriculteur) sur la même zone géographique,
- la dépendance entre deux agriculteurs pratiquant la même culture sur deux zones géographiques différentes,
- la dépendance entre deux agriculteurs pratiquant deux cultures différentes sur deux zones géographiques différentes.

2.4. Notations

Tout au long de ce papier,

l'indice c sera utilisé pour les cultures
l'indice r , pour les zones géographiques
l'indice t , pour les périodes (le temps)
l'indice i , pour les agriculteurs

Nous notons :

- Θ , l'ensemble des cultures assurées
- Ω , l'ensemble des zones géographiques (par exemple les régions administratives)
- $N_{r,c,t}^l$, le nombre total d'agriculteurs dans la zone géographique r ayant la culture c pour la période t ,
- $N_{r,c,t}$, le nombre d'agriculteurs dans le portefeuille de l'assureur pour la zone géographique r ayant la culture c pendant la période t . Ce nombre de polices peut être déterminé par un facteur (compris entre 0 et 1) multiplié par le nombre total d'agriculteurs pratiquant la culture c dans la région r . Ce facteur est généralement défini par le business plan de l'assureur et peut être soit aléatoire, ou soit déterministe. Nous le considérons ici comme étant déterministe : $N_{r,c,t} = k_{r,c,t} \times N_{r,c,t}^l$, $k_{r,c,t} \in [0, 1]$,
- $\tilde{R}_{r,c,t}$, la variable aléatoire représentant le rendement de la culture c dans la zone géographique r pour la période t .

Pour chaque agriculteur i , $1 \leq i \leq N_{r,c,t}$ dans la zone géographique r , soient :

- $\tilde{R}_{r,c,i,t}$, son rendement pour cette culture pendant la période t
- $R_{r,c,i,t,ref}$, son rendement de référence de la période t ,
- $\alpha_{r,c,i,t}$, le taux de franchise choisi à l'agriculteur i
- $V_{r,c,i,t}$, la surface cultivée pour cette culture pendant la période t
- $P_{r,c,t}$, le prix de référence, pour la période t , de la culture c produite dans la zone géographique r . Ce prix est le même pour tous les agriculteurs.

3. Le modèle économique

3.1. Introduction

Nous cherchons à construire un modèle permettant d'estimer la fonction de distribution de la charge agrégée de sinistres. Compte tenu des différentes formes de dépendance à prendre en compte, nous avons retenu une approche par simulation de Monte Carlo.

Le modèle doit aussi tenir compte du fait que les franchises peuvent être différentes en fonction des cultures et des agriculteurs. Il doit donc permettre de simuler les sinistres au niveau individuel de l'agriculteur.

La charge agrégée de sinistres sur le portefeuille est la somme des sinistres individuels sur tous les agriculteurs et sur toutes les cultures du portefeuille de l'assureur.

$$\tilde{S}_t = \sum_{c \in \Theta} \sum_{r \in \Omega} \sum_{i=1}^{N_{r,c,t}} \tilde{S}_{r,c,i,t}$$

C'est une somme de variables aléatoires dépendantes entre elles. L'estimation de la fonction de distribution de la charge agrégée des sinistres nécessite de construire la fonction de distribution jointe du vecteur des sinistres $\left(\tilde{S}_{r,c,i,t} \right)_{c \in \Theta, r \in \Omega, 1 \leq i \leq N_{r,c,t}}$ de l'ensemble des agriculteurs du portefeuille. Dans les paragraphes suivants, nous proposons une méthode pour simuler cette distribution jointe.

3.2. La charge individuelle de sinistres

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cadre d'une culture donnée.

La charge de sinistres d'un agriculteur i sur la période considérée (généralement une année) est une variable aléatoire qui dépend :

- de son rendement sur cette période (qui est une variable aléatoire)
- des caractéristiques du contrat (rendement de référence, surfaces assurées, taux de franchise, ...)
- du prix assuré

Pour un agriculteur i pratiquant la culture c dans la zone géographique r , il y a sinistre dès que le rendement sur la période couverte est inférieur au rendement de référence (déduction faite de la franchise). Dans le cas contraire, il n'y a pas d'indemnisation.

- Si $\tilde{R}_{r,c,i,t} \geq (1 - \alpha_{r,c,i,t}) R_{r,c,i,t,ref}$, alors il n'y a pas d'indemnisation. Le montant du sinistre $\tilde{S}_{r,c,i,t} = 0$
- Si $\tilde{R}_{r,c,i,t} < (1 - \alpha_{r,c,i,t}) R_{r,c,i,t,ref}$, alors l'assureur doit indemniser l'agriculteur ; le montant du sinistre $\tilde{S}_{r,c,i,t} = P_{r,c,t} V_{r,c,i,t} \left((1 - \alpha_{r,c,i,t}) R_{r,c,i,t,ref} - \tilde{R}_{r,c,i,t} \right)$

La variable aléatoire montant du sinistre pour l'agriculteur i s'écrit donc :

$$\tilde{S}_{r,c,i,t} = P_{r,c,t} V_{r,c,i,t} \text{Max}\left(\left(1 - \alpha_{r,c,i,t}\right)R_{r,c,i,t,ref} - \tilde{R}_{r,c,i,t} ; 0\right)$$

Cette formule montre que pour une culture donnée, la variable caractéristique du risque pour chaque agriculteur est son rendement (production totale / la surface cultivée). C'est une variable aléatoire, que nous pouvons considérer comme continue. Pour un agriculteur i donné, l'estimation de la fonction de distribution des sinistres nécessite de connaître la distribution complète des rendements individuels.

Soit $F_{r,c,i,t}$, la fonction de répartition du rendement de l'agriculteur i pratiquant la culture c dans la région r :

$$F_{r,c,i,t}(x) = P\left\{\tilde{R}_{r,c,i,t} \leq x\right\}$$

Cette fonction de distribution doit être cohérente avec celle utilisée dans le modèle de tarification. Elle peut être estimée à partir des données individuelles des agriculteurs.

3.3. La charge totale de sinistre sur le portefeuille

Pour estimer la charge totale de sinistres sur le portefeuille, nous avons besoin de la distribution jointe du vecteur des rendements individuels (distribution marginale + structure de dépendance). Cette distribution jointe combinée avec les caractéristiques du portefeuille décrit le risque global pour l'assureur.

Compte tenu du nombre très élevé de combinaisons agriculteurs/cultures (pouvant être supérieur à 800 000), il ne serait pas judicieux de modéliser directement la structure de dépendance entre les agriculteurs. Nous avons donc retenu de modéliser la dépendance entre les différents agriculteurs à partir des rendements régionaux.

L'approche retenue revient à décomposer le risque de l'assureur en deux composantes :

- le risque systématique,
- le risque spécifique de chaque agriculteur.

Lorsqu'une zone géographique est touchée par un événement climatique, ce dernier peut entraîner la baisse du rendement d'une grande partie, voire de l'ensemble des agriculteurs de cette zone géographique, et donc le rendement global (régional) de la zone géographique considérée. Ceci constitue un risque systématique pour un assureur qui souscrit dans cette zone géographique. Nous considérons que ce risque systématique est complètement décrit par la variable aléatoire rendement régional.

Par ailleurs, étant donnée la survenance d'un événement climatique, les agriculteurs individuels ne sont pas forcément affectés de la même manière : ceci constitue le risque spécifique de chaque agriculteur. Le rendement d'un agriculteur individuel donné conditionnel au rendement régional caractérise ce risque spécifique.

Nous proposons dans la suite :

- de modéliser dans un premier temps le vecteur des rendements régionaux (pour les différents types de cultures) en tenant compte des dépendance entre les cultures et les régions,
- de modéliser ensuite pour chaque culture, les rendements individuels des agriculteurs dans les différentes régions.

A. Modélisation des rendements régionaux

L'objectif de cette partie est d'étudier la distribution jointe du vecteur des rendements régionaux $(\tilde{R}_{r,c,t})_{c \in \Theta, r \in \Omega}$. Pour une culture c et une région r données, le rendement régional est égal à la production totale de la région pendant la période considérée, rapportée à la surface cultivée. En théorie, la distribution du rendement régional peut être déduite de celles des rendements individuels. Il peut s'écrire comme la moyenne pondérée par les surfaces des rendements individuels des agriculteurs pratiquant cette culture dans la région considérée.

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{r,c,t} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_{r,c,t}^I} v_{r,c,i,t}} \sum_{i=1}^{N_{r,c,t}^I} v_{r,c,i,t} \tilde{R}_{r,c,i,t} \\ &= \sum_{i=1}^{N_{r,c,t}^I} \eta_{r,c,i,t} \tilde{R}_{r,c,i,t}\end{aligned}$$

avec $\sum_{i=1}^{N_{r,c,t}^I} \eta_{r,c,i,t} = 1$.

Dans le cas où tous les agriculteurs pratiquant cette culture c dans la région ont tous la même surface, le rendement régional correspond à la moyenne arithmétique des rendements

individuels :

$$\tilde{R}_{r,c,t} = \frac{1}{N_{r,c,t}^I} \sum_{i=1}^{N_{r,c,t}^I} \tilde{R}_{r,c,i,t}$$

Puisque les rendements individuels sont des variables aléatoires dépendantes, pour effectuer l'estimation de la fonction de distribution de $\tilde{R}_{r,c,t}$, il serait nécessaire de disposer de la distribution jointe des rendements individuels de tous les agriculteurs de la région (distribution marginale + structure de dépendance).

Toutefois, nous n'utiliserons pas cette approche car la structure de dépendance entre les agriculteurs individuels est trop complexe à étudier directement.

Nous allons étudier directement la distribution du vecteur des rendements régionaux. Dans la suite, nous supposons que le vecteur des rendements régionaux $(\tilde{R}_{r,c,t})_{c \in \Theta, r \in \Omega}$ suit une distribution jointe G_t que nous supposons continue. Nous noterons $G_{r,c,t}$ les fonctions de distribution marginale de G_t : $G_{r,c,t}(x) = P\{\tilde{R}_{r,c,t} \leq x\}$.

Pour étudier cette distribution jointe, nous utiliserons la théorie des copulas. C'est un outil statistique très performant pour étudier des formes de dépendance très variées entre plusieurs variables aléatoires (dépendances linéaires, dépendances non linéaires, dépendances de queue, ...). Il existe déjà une bibliographie très vaste sur le sujet. Dans cet article, nous ne présentons pas de façon détaillée la théorie des copulas. Nous nous contentons de présenter les principes généraux sur les copulas ainsi que les copulas que nous avons retenus dans le cadre de l'étude.

Définition 1 : Définition d'un copula

Un copula est une fonction de répartition n -dimensionnelle sur l'hypercube $[0, 1]^n$, dont les marginales sont uniformes sur $[0, 1]$.

Théorème 1 : Théorème de SKLAR

Soit H une fonction de répartition n -dimensionnelle ayant pour fonctions de répartition marginales H_1, \dots, H_n , alors il existe un copula (n -copula) C tel que pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

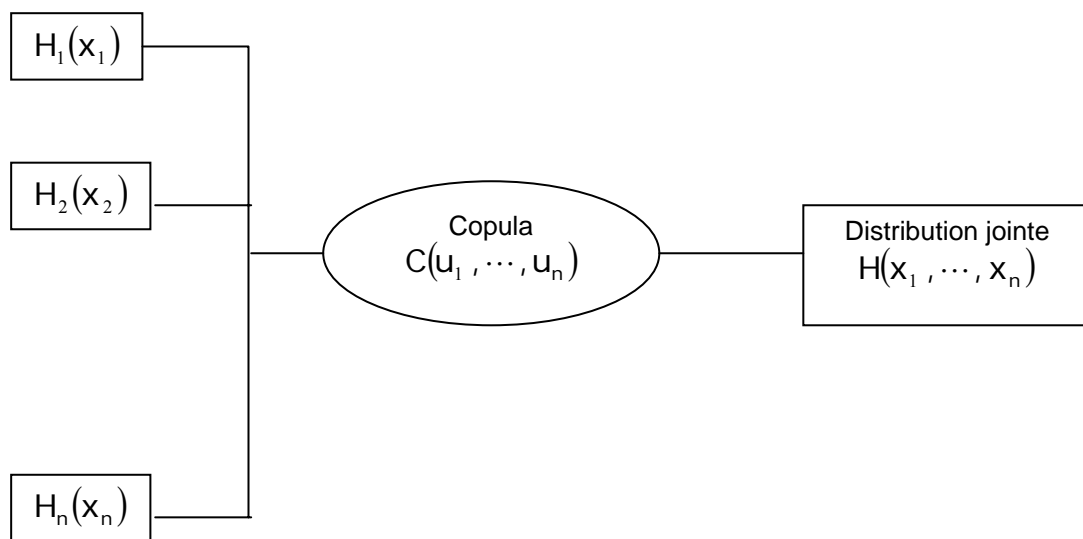
$$H(x_1, \dots, x_n) = C(H_1(x_1), \dots, H_n(x_n)) \quad (1)$$

Dans le cas où les fonctions de répartition marginales H_1, \dots, H_n sont continues, alors C est unique.

Ce théorème permet de séparer toute distribution multidimensionnelle en deux parties :

- les distributions marginales
- le copula, qui décrit complètement la structure de dépendance entre les différentes composantes

Etant donnés les fonctions de répartition marginales et le copula, il est possible de reconstituer la fonction de répartition jointe H .



Définition 2 : Fonction inverse généralisé

Si F est une fonction de répartition à une dimension. La fonction inverse généralisée de F est définie par :

$$F^{-1}(t) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > t \}$$

pour tout $t \in [0, 1]$.

Corollaire 1

Si H est une fonction de répartition n-dimensionnelle ayant pour fonctions de répartition marginales H_1, \dots, H_n et C un copula vérifiant (1), alors pour tout vecteur $u = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$, C peut s'écrire sous la forme :

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(H_1^{-1}(u_1), \dots, H_n^{-1}(u_n))$$

où

H_i^{-1} représente la fonction inverse généralisée de H_i pour $1 \leq i \leq n$.

Ce corollaire au théorème 1 permet de construire des familles de copulas à partir des fonctions de répartition à n-dimensionnelles (par copulas gaussiens, copulas de Student, ...).

Propriété intéressante des copulas

Les copulas présentent la propriété intéressante décrit dans le théorème suivant :

Théorème 2 : Invariance par transformation strictement croissante

Si T_1, \dots, T_n n fonctions strictement croissantes, alors le vecteur $(T_1(\tilde{X}_1), \dots, T_n(\tilde{X}_n))$ admet la même copula que le vecteur $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$.

On pourra trouver la preuve de ce théorème dans [4] Embrechts et al (1999).

Quelques exemples de copulas

Il existe plusieurs familles de copulas. Ci-dessous quelques exemples de copulas utilisés en assurance. Nous les présentons uniquement dans le cas bivarié :

- Copula indépendant : $C(u, v) = u \cdot v$ (indépendance)
- Copula comonotone : $C(u, v) = \min(u, v)$ (dépendance parfaite positive)
- Copula anti-monotone : $C(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ (dépendance parfaite négative - uniquement en dimension 2)
- Copulas elliptiques

Les copulas elliptiques sont construits à partir des distributions elliptiques (voir définition dans [4] Embrechts et al (1999)). Les deux familles de copulas elliptiques les plus rencontrées dans la pratique sont :

- *Les copulas gaussiens (normaux)*

Ils sont construits à partir de distributions normales multivariées (Cf. Corollaire 1)

$$C_{[\rho]}^{Ga}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Phi_{[\rho]}^{(2)}(\Phi^{-1}(\mathbf{u}), \Phi^{-1}(\mathbf{v}))$$

où

Φ désigne la fonction de répartition d'une distribution normale centrée réduite
 $\Phi_{[\rho]}^{Ga}$ désigne la fonction de répartition d'une distribution normale bivariée de marginales centrées réduites et de matrice de corrélation $[\rho]$

Les copulas gaussiens ne permettent pas de modéliser des dépendances de queue.

- *Les copulas de Student (t-copula)*

Comme les copulas gaussiens, les copulas de Student sont construits à partir des distributions de Student multivariées.

$$C_{\nu, [\rho]}^t(u, v) = t_{\nu, [\rho]}^{(2)}(t_{\nu}^{-1}(u), t_{\nu}^{-1}(v))$$

où

t_{ν} désigne la fonction de répartition d'une distribution de Student à ν degrés de liberté,

$t_{\nu, [\rho]}^{(2)}$ désigne la fonction de répartition de répartition jointe d'une distribution jointe (bivariée) de Student à ν degrés de liberté et de matrice de corrélation $[\rho]$.

Les copulas de Student permettent de modéliser des dépendances de queue.

▪ Copulas archimédiens

Les copulas archimédiens s'écrivent sous la forme :

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

où

φ est une fonction continue strictement décroissante de $[0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ telle que $\varphi(1) = 0$. φ est appelée le générateur du copula C ,

$\varphi^{[-1]}$ est la fonction inverse généralisée de φ

Le tableau suivant présente les copulas archimédiens les plus utilisés dans la pratique.

Tableau 1 : Exemples de copulas archimédiens

Famille	Générateur	Formule du copula	Caractéristiques
Frank	$\varphi(t) = -\ln\left(\frac{e^{-at} - 1}{e^{-a} - 1}\right)$ $a \neq 0$	$C_F(u, v) = -\frac{1}{a} \ln\left(1 + \frac{g_u g_v}{g_1}\right)$ $g_z = e^{-az} - 1$	Dépendance symétrique Pas de dépendance de queue
Gumbel	$\varphi(t) = (-\ln(t))^{-a}$ $a > 1$	$C_{Gu}(u, v) = e^{\left[-((- \ln(u))^a + (- \ln(v))^a)^{\frac{1}{a}}\right]}$	Dépendance asymétrique Dépendance de queue à droite.
Clayton	$\varphi(t) = a \left(t^{\frac{1}{a}} - 1\right)$ $a > 1$	$C_C(u, v) = \left(u^{-\frac{1}{a}} + v^{-\frac{1}{a}} - 1\right)$	Dépendance asymétrique Dépendance de queue à gauche
HRT (Heavy Right Tail)	Copula non archimédien	Survival copula du copula de Clayton $C_{HRT}(u, v) = C_C(1 - u, 1 - v)$	Propriétés inverses au copula de Clayton

Famille de copulas utilisées

En général, les copulas archimédiens permettent de modéliser des structures de dépendance très variées, notamment en dimension 2. Cependant, l'inconvénient de cette famille de copulas est que leur extension au cas multivarié ($n > 2$) n'est pas toujours possible. De plus, lorsque cette extension est possible, les structures de dépendance modélisées sont très restreintes. Dans le cadre de ce modèle, nous avons donc choisi d'utiliser uniquement des copulas qui peuvent être facilement étendus aux cas multivariés avec un nombre de composantes qui peut être assez élevé : nombre de zones géographiques (régions administrative) x nombre moyen de cultures par zone géographique.

La famille de copulas qui nous semble la plus appropriée est la famille de copulas elliptiques (uniquement les copulas gaussiens et les copulas de Student).

B. Modélisation des rendements individuels

L'approche utilisée pour étudier les rendements individuels s'apparente fortement à une approche bayésienne. Elle repose sur les hypothèses suivantes :

Les hypothèses du modèle

- **H1** : Conditionnellement au vecteur des rendements régionaux $\left(\tilde{R}_{r,c,t}\right)_{c \in \Theta, r \in \Omega}$, les rendements individuels des agriculteurs sont indépendants. En d'autres termes, considérons un agriculteur i (resp. j) pratiquant la culture c (resp. c') dans la région r (resp. r'). Cette hypothèse entraîne donc que les rendements conditionnels $\left(\tilde{R}_{r,c,i,t} \mid \left(\tilde{R}_{r,c,t}\right)_{c \in \Theta, r \in \Omega}\right)$ et $\left(\tilde{R}_{r',c',j,t} \mid \left(\tilde{R}_{r,c,t}\right)_{c \in \Theta, r \in \Omega}\right)$ sont indépendants.

Une conséquence de l'hypothèse H1 est :

- **H1bis** : Pour une culture c dans une région r , les rendements des agriculteurs conditionnels au rendement régional sont indépendants entre eux ; en d'autres termes, les variables aléatoires conditionnelles $\left(\tilde{R}_{r,c,i,t} \mid \tilde{R}_{r,c,t}\right)_{1 \leq i \leq N_{r,c,t}^I}$ sont indépendantes entre elles.

- **H2** :
 - Les fonctions de distributions des rendements régionaux appartiennent à une même famille de distributions théoriques
 - Les fonctions de distribution des rendements individuels conditionnels aux rendements régionaux appartiennent à une même famille de distributions théoriques

Afin de simplifier la présentation du modèle, nous acceptons une hypothèse additionnelle :

- **H3** : Pour une culture donnée dans une zone géographique donnée, conditionnellement au rendement régional,
 - tous les agriculteurs ont la même espérance de rendement égal au rendement régional
 - tous les agriculteurs ont la même variance de rendement

Cette dernière hypothèse n'entraîne aucune restriction sur le modèle. Elle peut facilement être assouplie.

Quelques remarques sur les hypothèses

- Remarque 1 :

L'hypothèse **H3** a pour conséquence que :

- $E\left[\tilde{R}_{r,c,i,t} \mid \tilde{R}_{r,c,t}\right] = \tilde{R}_{r,c,t} \Rightarrow E\left[\tilde{R}_{r,c,i,t}\right] = E\left[\tilde{R}_{r,c,t}\right]$. Pour chaque culture c , tous les agriculteurs de la région r ont la même espérance de rendement égale au rendement régional.
- $\text{Var}\left[\tilde{R}_{r,c,i,t}\right] = \text{Var}\left[\tilde{R}_{r,c,j,t}\right]$ pour tout i, j

- Remarque 2

L'hypothèse **H1bis** a pour conséquence que :

- La dépendance entre deux agriculteurs pratiquant la même culture dans la même région est complètement décrite par la variable rendement régional $\tilde{R}_{r,c,t}$.

A titre d'exemple, on peut montrer sans grande difficulté que les hypothèses **H3** et **H1bis** entraîne que la covariance entre les rendements des deux agriculteurs est égale à la variance du rendement régional :

$$\text{Cov}\left(\tilde{R}_{r,c,i,t}, \tilde{R}_{r,c,j,t}\right) = \text{Var}\left(\tilde{R}_{r,c,t}\right) \text{ pour } i \neq j.$$

De plus on peut montrer que dans le cas où le coefficient de corrélation ($\rho > 0$) entre deux agriculteurs différents est le même quels que soient les agriculteurs, ce coefficient de corrélation linéaire est égal au rapport entre la variance du rendement régional et la variance du rendement individuel. En effet, compte tenu de l'égalité des variances individuelles,

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(\tilde{R}_{r,c,i,t}, \tilde{R}_{r,c,j,t}\right) &= \rho \sqrt{\text{Var}\left[\tilde{R}_{r,c,i,t}\right] \text{Var}\left[\tilde{R}_{r,c,j,t}\right]} = \rho \text{Var}\left[\tilde{R}_{r,c,i,t}\right] \\ \Rightarrow \rho &= \frac{\text{Var}\left[\tilde{R}_{r,c,t}\right]}{\text{Var}\left[\tilde{R}_{r,c,i,t}\right]} \end{aligned}$$

Etant donnée la variance du rendement régional, la formule précédente montre que le coefficient de corrélation linéaire est inversement proportionnel à la variance individuelle. Donc, plus cette variance individuelle est élevée, plus le coefficient de corrélation est faible et inversement.

- Remarque 3

L'hypothèse **H1** entraîne que :

- La dépendance entre deux agriculteurs pratiquant deux cultures différentes dans la même région ou dans deux régions différentes est décrite par la dépendance entre les rendements régionaux

- La dépendance entre les agriculteurs pratiquant la même culture dans deux régions différentes est aussi décrite par la dépendance entre les rendements régionaux

On peut montrer que les hypothèses **H1** et **H3** entraînent que la covariance entre ces deux agriculteurs est égale à la covariance entre les rendements régionaux. En d'autres termes pour deux agriculteurs i et j , pratiquant respectivement les cultures c_1 et c_2 dans deux régions r_1 et r_2 ,

$$\text{Cov}(\tilde{R}_{r_1, c_1, i, t}, \tilde{R}_{r_2, c_2, j, t}) = \text{Cov}(\tilde{R}_{r_1, c_1, t}, \tilde{R}_{r_2, c_2, t})$$

Le modèle

A partir du vecteur des rendements régionaux, des distributions conditionnelles des rendements individuels (conditionnellement aux rendements régionaux) et des hypothèses faites ci-dessus, il devient possible de simuler les rendements individuels des agriculteurs.

Ces rendements sont simulés en utilisant une approche qui s'apparente fortement à une approche bayésienne :

Pour chaque agriculteur individuel, soit $F_{r,c,t}^*$, la fonction de distribution de la variable conditionnelle $\left(\tilde{R}_{r,c,i,t} \mid \left(\tilde{R}_{r,c,t} \right)_{c \in \Theta, r \in \Omega} \right)$. Sous les hypothèses ci-dessus, le rendement individuel est une variable aléatoire suivant la distribution $F_{r,c,t}^*$ dont l'espérance mathématique est une variable aléatoire égale au rendement régional : $\tilde{R}_{r,c,t}$.

A partir de la fonction de distribution jointe du vecteur des rendements régionaux et de la fonction de distribution des rendements individuels conditionnels aux rendements régionaux, on peut donc :

- simuler les rendements individuels,
- appliquer les conditions des contrats,
- simuler pour chaque agriculteur la charge de sinistres,
- simuler la charge totale de sinistres sur le portefeuille,
- estimer, la fonction de distribution de la charge de sinistres totale de l'assureur.

Dans le paragraphe suivant, nous proposons un algorithme pour simuler cette charge de sinistres agrégée.

3.4. Simulation de la charge de sinistre agrégée du portefeuille

La charge agrégée des sinistres sur le portefeuille est la somme des sinistres individuels sur tout le portefeuille. C'est une somme d'un nombre très importants (nombre d'agriculteurs dans le portefeuille) de variables aléatoires dépendantes. Pour estimer sa distribution, nous avons retenu d'utiliser une approche par simulation de Monte Carlo.

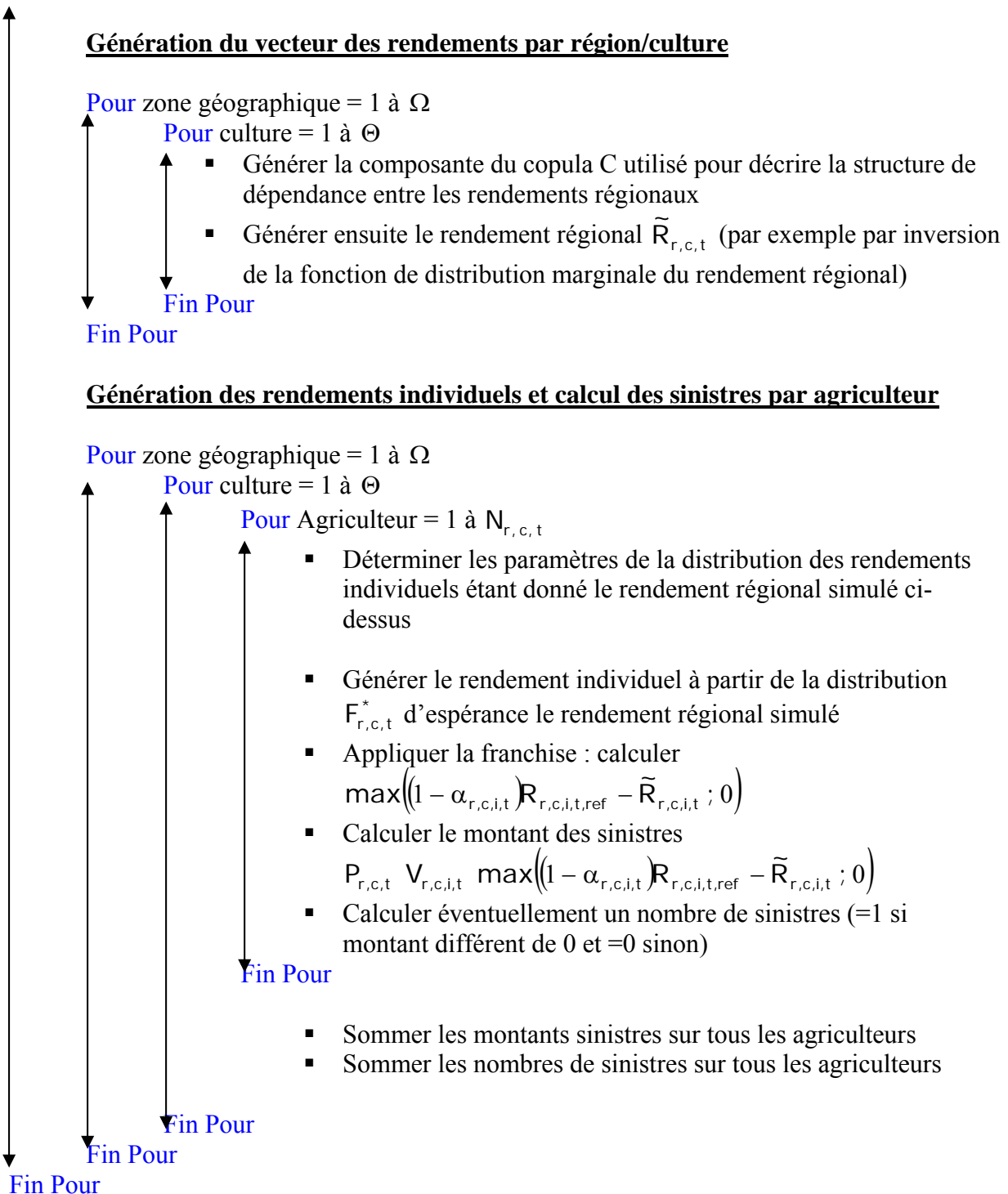
La simulation se décompose en deux parties :

- La simulation des rendements régionaux
- La simulation des rendements individuels et le calcul des sinistres

Ci-dessous un algorithme de simulation de la fonction de distribution de cette charge de sinistres :

Algorithme

Pour simulation = 1 à Nombre de simulations



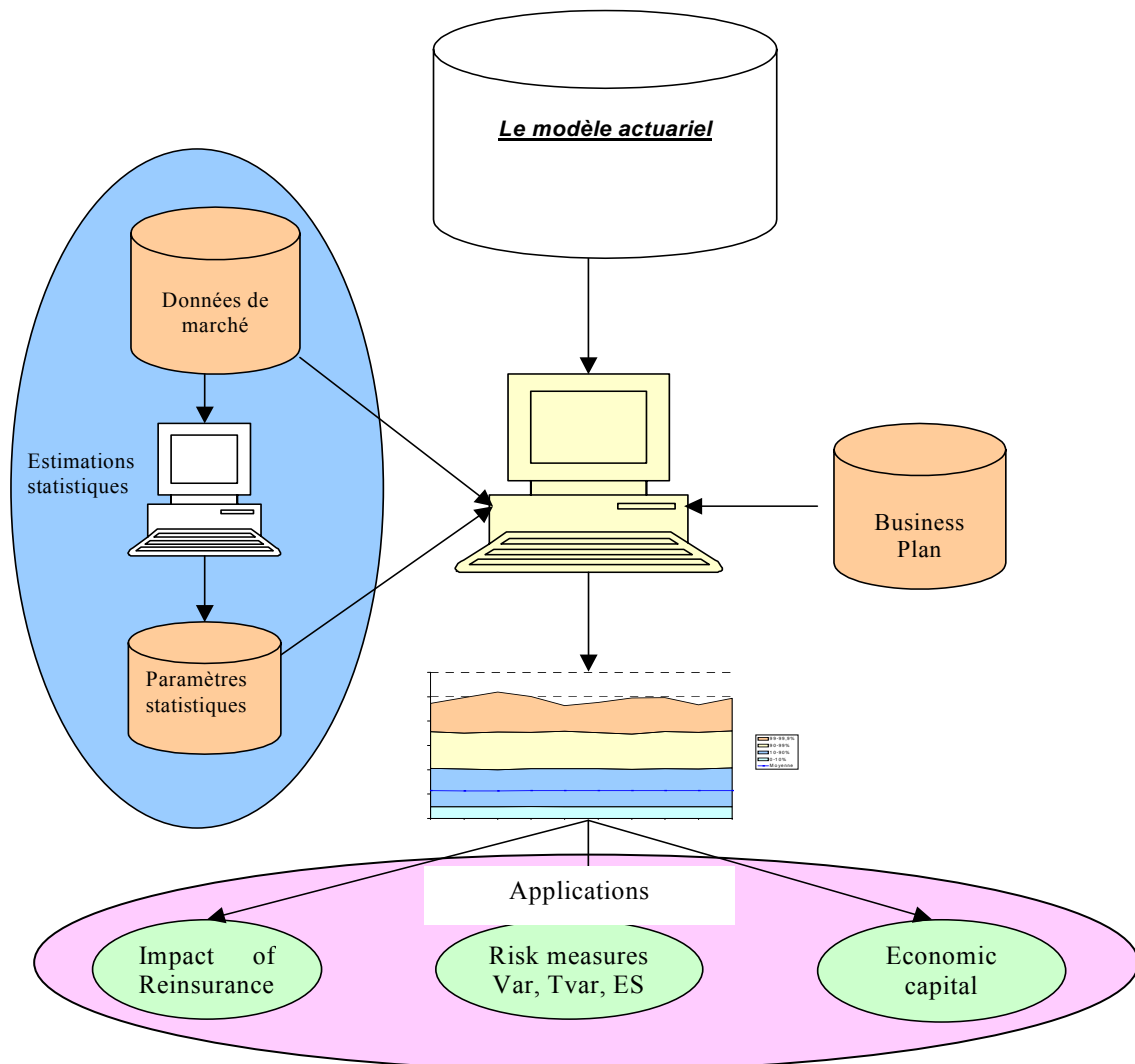
4. Mise en oeuvre du modèle

4.1. Fonctionnement du modèle

Le modèle actuariel présenté dans ce papier a été implémenté dans un logiciel de simulation. Les données de marché, les paramètres statistiques estimés à partir des données de marché, ainsi que le business plan sont utilisés pour paramétrer le modèle. Le modèle procède ensuite à la simulation de la charge de sinistre agrégée et donc de construire sa fonction de distribution. Cette fonction de distribution peut ensuite être utilisée pour plusieurs applications dont l'application de la réassurance, l'application des mesures de risque, l'étude du besoin en capital, ...

Le graphique suivant résume le fonctionnement de ce modèle.

Graphique 6 : Schéma de fonctionnement du modèle



4.2. Quelques applications

Le modèle économique présenté ci-dessus peut être utilisé pour étudier :

- les besoins de réassurance du portefeuille
- le besoin en capital engendré par le portefeuille

A. Etude de la réassurance

En général, il existe plusieurs classifications des couvertures de réassurance. Les plus fréquentes dans la littérature sont :

- Obligatoires / Facultatifs
- Proportionnelles / Non Proportionnelles

Cependant, il existe une autre classification qui peut être pratique du point de vue de la modélisation :

- les couvertures globales
- les couvertures locales

Les couvertures globales

Une couverture de réassurance est dite globale, lorsque le résultat annuel de la couverture peut s'écrire comme une fonction du résultat annuel de l'assureur sur les risques couverts. Les deux principaux exemples de couvertures globales sont les traités Quota Share et les traités Stop Loss.

Les couvertures locales

Une couverture de réassurance est dite locale, lorsque le résultat annuel de cette couverture ne s'écrit pas comme une fonction du résultat annuel de l'assureur sur les risques couverts. Les deux principaux types de couvertures locales sont les traités Excess of Loss (XS) et les traités Surplus.

Dans le cas du produit d'assurance récolte, les couvertures locales ne sont pas très adaptées. En effet,

- Les sommes assurées étant assez homogènes, un traité Surplus ne serait pas approprié.
- Les sinistres par police n'étant pas très élevés, un traité XS par risque ne serait pas adapté.
- Puisqu'il est difficile de définir ce que représente un seul événement, il ne serait pas aisé d'appliquer un traité en XS par événement

Seules les couvertures globales (Quota Share ou Stop Loss) peuvent être utilisées sur ce portefeuille. Dans la suite, nous illustrons le fonctionnement de la réassurance Stop Loss sur ce portefeuille.

Impact de la réassurance Stop Loss

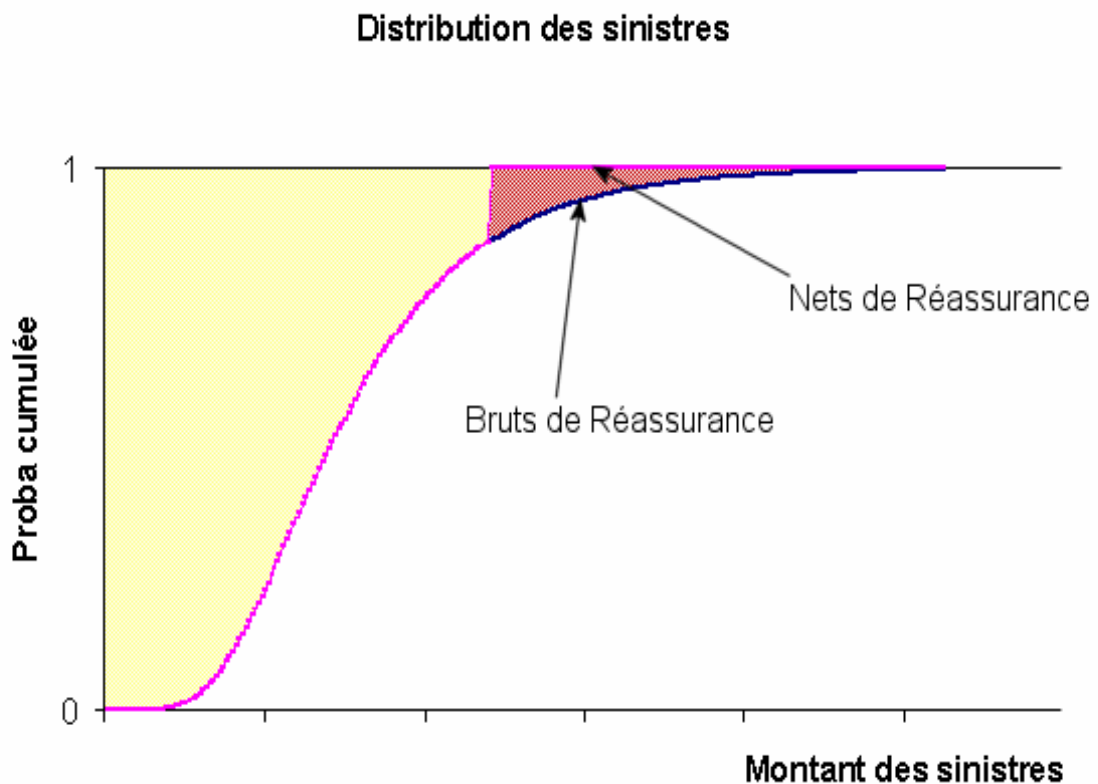
En général, le fonctionnement d'une couverture Stop Loss est exprimé en fonction du ratio S/P (Sinistres / Primes). Cependant, elle peut aussi être exprimée directement en termes de montant total des sinistres. Cette couverture peut donc s'appliquer sur la charge agrégée de sinistres \tilde{S}_t du portefeuille.

Considérons par exemple la couverture Stop Loss illimitée avec une priorité P. La charge de sinistres nette de réassurance s'écrit de la façon suivante :

$$\tilde{S}_t^{(n)} = \min(\tilde{S}_t, P)$$

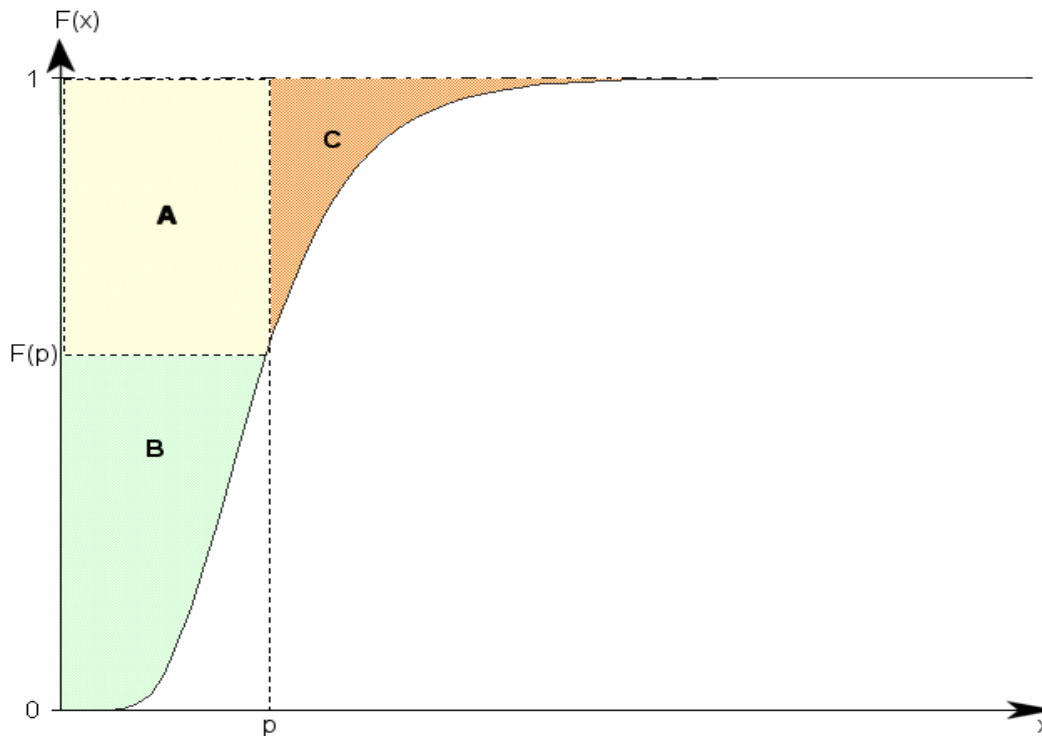
Le graphique ci-dessous montre les fonctions de distribution respectives de \tilde{S}_t et de $\tilde{S}_t^{(n)}$.

Graphique 7 : Fonctions de distribution des charges de sinistres brute et nette de réassurance stop loss



La prime pure Stop Loss est donnée par $E\left[\left(\tilde{S}_t - P\right)^+\right] = E\left[\max\left(\tilde{S}_t - P, 0\right)\right]$ et peut être déduite de la courbe de la fonction de répartition de la charge de sinistre brute de réassurance comme ci-dessous :

Graphique 8 : Prime Stop Loss



L'aire C représente la prime Stop Loss pour un niveau de priorité égal à p.

B. Etude du besoin en capital

A partir de la fonction de distribution de la charge de sinistre nette de réassurance, et étant donné :

- Les primes brutes
- Les primes de réassurance
- Les frais
- Les produits financiers
- Le taux d'impôts
- ...

il est possible de construire la fonction de distribution du résultat après impôts \tilde{X}_t du portefeuille pendant la période considérée. L'application des mesures de risque comme la Value at Risk (VaR), la Tail Value at Risk (TVaR) ou l'Expected Shortfall (ES) sur cette variable permet d'estimer le besoin en capital économique sur le portefeuille.

Définition 3 :

Pour un seuil de probabilité $\alpha \in (0, 1)$ donné, la Value at Risk du résultat \tilde{X}_t , notée $\text{Var}_\alpha(\tilde{X}_t)$, est définie par l'équation suivante :

$$P\{\tilde{X}_t < -\text{Var}_\alpha(\tilde{X}_t)\} = \alpha$$

Définition 4 :

La Tail Value at Risk du résultat \tilde{X}_t , notée $\text{TVaR}_\alpha(\tilde{X}_t)$, est défini par :

$$\text{TVaR}_\alpha(\tilde{X}_t) = E\left[-\tilde{X}_t \mid \tilde{X}_t < -\text{Var}_\alpha(\tilde{X}_t)\right]$$

Ces deux mesures de risque peuvent être utilisées pour déterminer le besoin en fonds propres du portefeuille considéré isolément. Le choix de l'une ou l'autre mesure dépend des objectifs poursuivis (pilotage, solvabilité, ...).

Définition 5 :

L'Expected Shortfall du résultat \tilde{X}_t , notée $\text{ES}_\alpha(\tilde{X}_t)$, est définie par :

$$\begin{aligned}\text{ES}_\alpha(\tilde{X}_t) &= E\left[-\tilde{X}_t - \text{Var}_\alpha(\tilde{X}_t) \mid \tilde{X}_t < -\text{Var}_\alpha(\tilde{X}_t)\right] \\ &= \text{TVaR}_\alpha(\tilde{X}_t) - \text{Var}_\alpha(\tilde{X}_t)\end{aligned}$$

Cette mesure de risque peut être utilisée au niveau d'un Groupe vis-à-vis de ses filiales ou par les autorités de contrôle des sociétés d'assurance.

5. Exemple

5.1. Les données utilisées

Ce modèle a été appliqué sur la ferme France, composée de l'ensemble des agriculteurs de la France métropolitaine. Les cultures considérées sont classées en trois grandes catégories (filières) suivantes :

- Les grandes cultures (Blé dur, blé tendre, maïs, pois, colza, pommes de terre, ...)
- Les fruits (pommes, poires, pêches, abricot, ...)
- Les vignes

Les données de marché utilisées par le modèle ont été constituées à partir des statistiques Agreste du SCEES. Il s'agit des nombres d'agriculteurs par zone géographique / culture, des surfaces cultivées, ...

Les zones géographiques considérées ici sont les régions administratives.

5.2. Quelques paramètres importants du modèle

Les paramètres statistiques

Les paramètres statistiques les plus importants du modèle sont :

- Les espérances mathématiques des rendements régionaux par culture
- Les coefficients de variation des rendements régionaux par culture
- Les coefficients de variation des rendements individuels par région/culture
- Les coefficients d'asymétrie (skewness) des rendements régionaux par culture
- Les coefficients d'asymétrie des rendements individuels par région/culture
- Les matrices de corrélation et des autres mesures de dépendance entre les rendements régionaux par culture

Les données de marché

- Nombre d'agriculteurs par région/culture
- Surfaces cultivées par région/culture

Les paramètres liés au portefeuille : le business plan

- Les parts de marché par culture et par région
Dans cet exemple, nous considérons la ferme France composée de l'ensemble des agriculteurs en France métropolitaine. La part de marché considérée est donc de 100% pour tous les types de cultures considérées et pour toutes les régions administratives.
- Les taux de franchise
Nous avons considéré un taux de franchise uniforme pour tous les agriculteurs et égal à 20%.

5.3. Les résultats

Les simulations ont été effectuées en considérant trois situations :

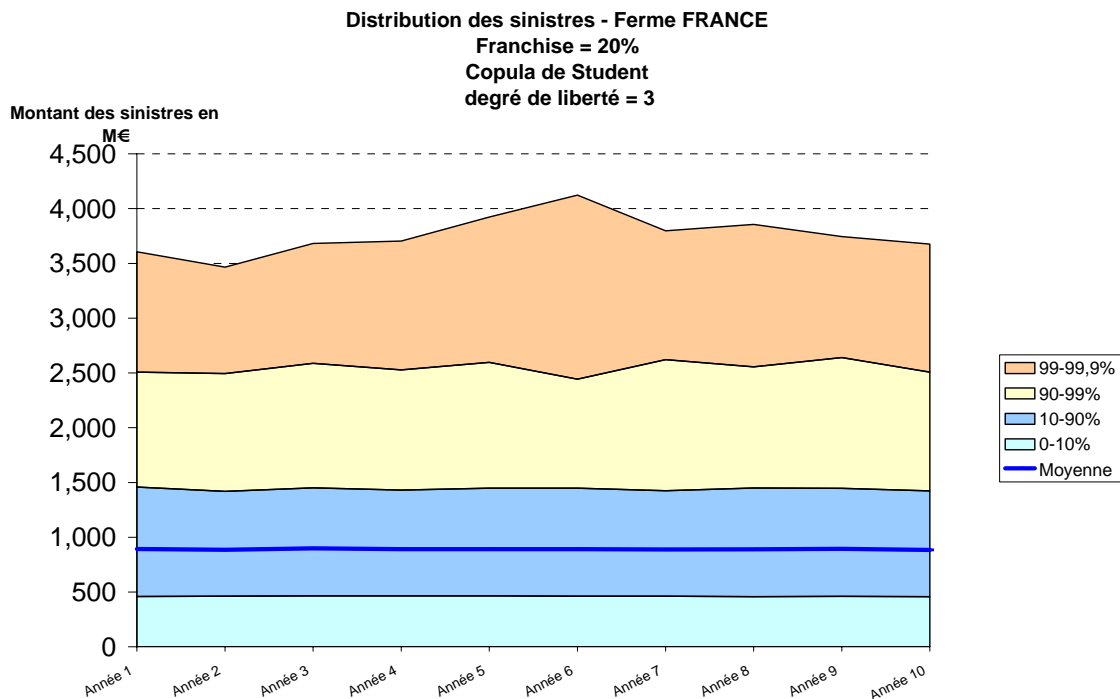
- la structure de dépendance est décrite par un copula de Student (avec 3 degrés de liberté),
- la structure de dépendance est décrite par un copula de Student (avec 10 degrés de liberté),
- la structure de dépendance est décrite par un copula normal.

Nous présenterons dans la suite :

- Le détail des résultats uniquement dans le cas du copula de Student avec 3 degrés de liberté
- Un tableau résumé présentant une comparaison des VaR, pour certains niveaux de probabilité, entre les différents copulas utilisés

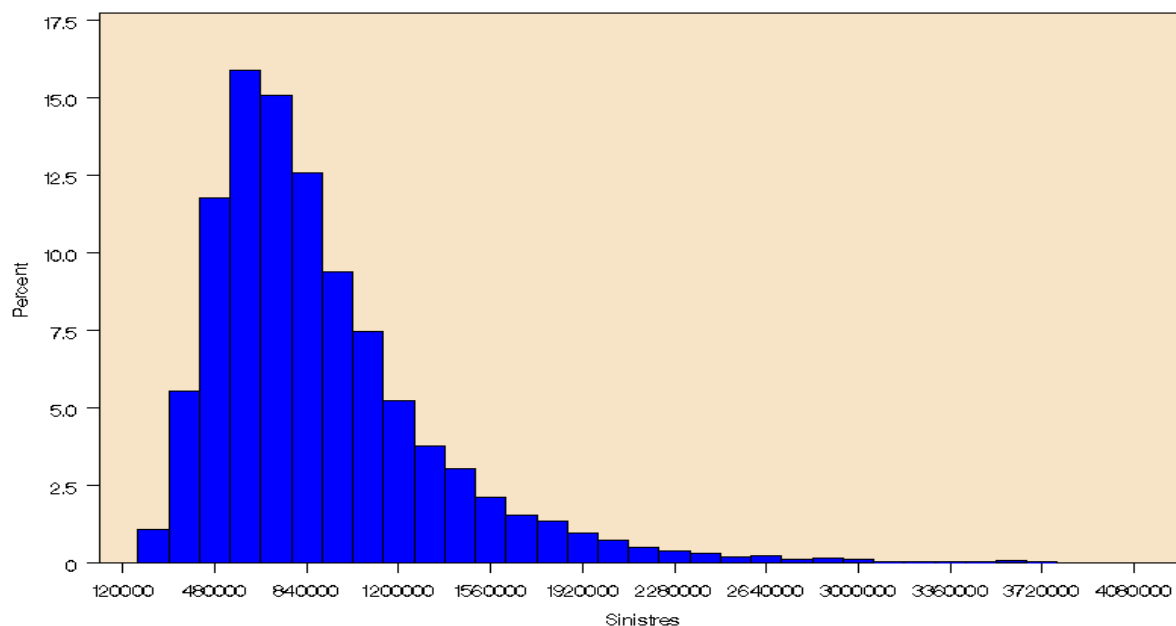
Résultats Copula de Student 3 degrés de liberté

Fonctions de distribution des sinistres sur 10 années



Distribution des sinistres, mesures de risque et primes stop loss – Année 1

Distribution de la charge de sinistres 1ere annee



Montants en milliers d'€

Probabilités	Value at risque (montant des sinistres)	Sinistres / Primes Pures	Sinistres / Capitaux Assurés	Prime Stop Loss	Prime Stop Loss / Prime pure	Tail Value at Risk	Expected Shortfall
Moyenne	893,682	100%	4.49%				
10.0%	459,699	51%	2.31%	441,542	49.41%	950,302	490,602
20.0%	552,631	62%	2.78%	362,170	40.53%	1,005,344	452,713
30.0%	629,617	70%	3.16%	304,507	34.07%	1,064,627	435,010
40.0%	703,234	79%	3.53%	256,681	28.72%	1,131,035	427,801
50.0%	784,513	88%	3.94%	212,161	23.74%	1,208,835	424,322
60.0%	878,397	98%	4.41%	170,130	19.04%	1,303,723	425,326
70.0%	997,523	112%	5.01%	128,539	14.38%	1,425,987	428,464
75.0%	1,073,916	120%	5.39%	107,540	12.03%	1,504,074	430,158
80.0%	1,161,541	130%	5.83%	87,919	9.84%	1,601,135	439,594
85.0%	1,288,093	144%	6.47%	65,909	7.37%	1,727,486	439,393
90.0%	1,458,526	163%	7.32%	44,891	5.02%	1,907,434	448,907
91.0%	1,501,993	168%	7.54%	40,784	4.56%	1,955,152	453,158
92.0%	1,556,780	174%	7.82%	36,151	4.05%	2,008,664	451,884
93.0%	1,612,723	180%	8.10%	31,962	3.58%	2,069,322	456,599
94.0%	1,680,788	188%	8.44%	27,514	3.08%	2,139,353	458,566
95.0%	1,771,504	198%	8.90%	22,527	2.52%	2,222,035	450,531
96.0%	1,862,565	208%	9.35%	18,504	2.07%	2,325,161	462,596
97.0%	1,986,289	222%	9.97%	14,252	1.59%	2,461,350	475,061
98.0%	2,177,689	244%	10.94%	9,608	1.08%	2,658,068	480,379
99.0%	2,506,916	281%	12.59%	4,861	0.54%	2,992,996	486,080
99.5%	2,879,527	322%	14.46%	2,107	0.24%	3,300,919	421,392
99.9%	3,607,378	404%	18.11%	214	0.02%	3,821,096	213,718

Le tableau précédent fournit la distribution de la charge de sinistres et du ratio sinistres / primes (S/P) du portefeuille. Il peut donc être utilisé pour définir les besoins de réassurance pour le portefeuille. Il fournit aussi une estimation de la prime de réassurance stop loss pour différents niveaux de priorité. A titre d'exemple, pour une priorité de 130% (sinistre sur primes pures), la prime de réassurance (hors chargements) estimée par de modèle est d'environ 10% de la prime pure.

En absence de réassurance, et hormis la prise en compte des chargements sur les primes, des frais, des produits financiers, ..., le besoin en fonds propres estimé pour ce portefeuille pour un niveau de probabilité de 1% serait d'environ :

- 1.6 milliards d'euros (2.507 – 0.893) lorsque la VaR est utilisée,
- 2.1 milliards d'euros (2.993 - 0.893) lorsque la TVaR est utilisée.

Tableau résumé des VaR et des TVaR pour différents copulas étudiés

- *Tableau des Value at Risk*

Montants en milliers d'€

Copula utilisé	Probabilités					
	20%	10%	5%	1%	0.50%	0.10%
Student 3 degrés de liberté	1,161,541	1,458,526	1,771,504	2,506,916	2,879,527	3,607,378
Student 10 degrés de liberté	1,070,187	1,411,407	1,673,595	2,290,148	2,544,170	3,038,961
Normal	1,187,021	1,463,037	1,714,563	2,289,896	2,488,274	2,941,553

- *Tableau des Tail Value at Risk*

Montants en milliers d'€

Copula utilisé	Probabilités					
	20%	10%	5%	1%	0.50%	0.10%
Student 3 degrés de liberté	1,601,135	1,907,434	2,222,035	2,992,996	3,300,919	3,821,096
Student 10 degrés de liberté	1,534,934	1,795,814	2,071,011	2,671,507	2,926,637	3,574,472
Normal	1,568,759	1,823,754	2,068,480	2,590,371	2,802,782	3,424,650

Ces tableaux montrent bien que pour les mêmes niveaux de dépendance et pour des probabilités faibles, les copulas de Student sont plus dangereux que le copula normal. En effet, comme indiqué précédemment les copulas de Student admettent des dépendances de queue alors que les copulas normaux ne l'admettent pas. Cependant pour des degrés de liberté très élevés, les résultats obtenus avec le copula de Student sont très proches de ceux obtenus avec le copula normal.

Bibliographie

- [1] Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber and D. Heath (1999), Coherent measure of risk. Mathematical Finance
- [2] Cadoux, D., J.M. Loizeau (2004), Dépendance au sein d'un portefeuille d'assurance non-vie : cas pratique d'application de la théorie des copules à la détermination du besoin en fonds propres. Mémoire CEA / Institut des Actuaire.
- [3] Demarta, S., A. J. McNeil (2004), The t-Copula and Related Copulas, www.math.ethz.ch/~mcneil/ftp/tCopula.pdf
- [4] Embrechts, P., A. J. McNeil and D. Straumann (1999), Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls, www.risklab.ch
- [5] Embrechts, P., A. J. McNeil, F. Lindskog (2001), Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, www.risklab.ch
- [6] Embrechts, P., R. Frey, A. J. McNeil (2005), Quantitative Risk Management: Concept, Techniques, Tools, Princeton Series in Finance
- [7] Fontenau, F. (2001), Impact de la corrélation des risques individuels sur le développement de l'assurance récolte, Rapport de stage 2^{ème} année ENSAE
- [8] Menard, C., Député du Finistère (2004), Gestion des risques climatiques en agriculture, Engager une nouvelle dynamique, Assemblée Nationale
- [9] Partrat, C. and J.L. Besson (2004), Assurance Non Vie, Modélisation, Simulation. Paris : Economica
- [10] Yu, M., (2004), Modélisation d'un portefeuille d'acceptations en réassurance : Dépendances multivariées et théorie des copulas, Mémoire de fin d'étude d'Actuariat (Magistère d'Actuariat ULP Strasbourg).